Увод у рачун на многострукостима
- октобар 2023. -[0]

Дарко Милинковић

[0]последња верзија се налази на www.matf.bg.ac.rs/~milinko

Акнолиџмент

Захваљујем Душану Јоксимовићу, Филипу Живановићу, Вукашину Стојисављевићу, Филипу Броћићу и другима, који су овај текст пажљиво читали, указивали ми на грешке и пропусте и давали корисне сугестије.

Џентлмен никад не користи координате ако не мора.

(Хансјорг Гајгес, *Увод у контактну топологију*)

Садржај

ГЛАВА 0

Увод: Диференцијални рачун без координата

1. Многострукости

1.1. Основни појмови. Читалац који држи овај текст у рукама вероватно је савладао курсеве са почетних година студија. Претпостављамо да су му познати појмови регуларних глатких кривих и површи, као и њихово следеће уопштење:

Дефиниција 1. *Тополошка многострукост димензије n* је Хаусдорфов тополошки простор M са пребројивом базом топологије, који је локално хомеоморфан отвореном подскупу еуклидског простора $\mathbb{R}^n$. *Глатка многострукост* класе C^k је тополошка многострукост M, таква да постоји фамилија

$$\mathcal{U} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\},$$

где је $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ отворено покривање простора M, а

$$\varphi_\lambda : U_\lambda \to \varphi_\lambda(U_\lambda) \subset \mathbb{R}^n$$

фамилија хомеоморфизама, таква да је

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{1}$$

дифеоморфизам класе C^k отворених скупова у $\mathbb{R}^n$, кад год је $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Ако другачије не напоменемо, термином *глатка многострукост*, или само *многострукост*, називамо многострукости класе C^∞. Елементе фамилије $\mathcal{U}$ називамо *локалним картама*, а максималну фамилију локалних карата *атласом* или *диференцијабилном структуром* многострукости. $\diamondsuit$

Уопштење површи са границом је *многострукост са границом*: Хаусдорфов простор M са пребројивом базом топологије и фамилијом $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, где су U_α отворени скупови који покривају M, а φ_α хомоморфизми скупа U_α на отворен[1] подскуп у полупростору

$$\mathbb{H}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n$$

такви да је

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{2}$$

дифеоморфизам[2] отворених скупова у полупростору $\mathbb{H}^n$, кад год је $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Ако је M многострукост са границом, тачке које се сликају у хиперпростор $\{x_1 = 0\} \subset \mathbb{H}^n$ у једној карти, сликају се у тај хиперпростор и у свакој другој карти: ово следи из општих тополошких аргумената. Скуп таквих тачака означава се са ∂M и назива *границом* или *крајем* многострукости са границом.

[1] у релативној топологији полупростора као потпростора еуклидског простора

[2] Ако је $X \subset \mathbb{R}^n$, пресликавање $f : X \to \mathbb{R}^m$ је глатко ако свака тачка $x \in X$ има отворену околину $V \ni x$, такву да f може да се продужи до глатког пресликавања $f : V \to \mathbb{R}^m$.

Граница многострукости димензије n је многострукост димензије $n-1$. Нпр, пробушени затворени диск $D_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq 1\}$ је дводимензиона многострукост са границом $\partial D_0 = \mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Приметимо да се тополошки руб (који се често означава истим симболом иако означава други појам) скупа D_0, скуп $\mathbb{S}^1 \cup \{0\}$, разликује од границе многострукости D_0.

Услов да су (1) и (2) дифеоморфизми нам омогућава да појам диференцијабилности из еуклидског простора ослободимо координата, тј. да га пренесемо на многострукости: ако су M и N глатке многострукости димензија m и n, пресликавање

$$F : N \to M \tag{3}$$

је диференцијабилно у тачки $p \in N$ ако је његов запис у локалним координатама глатко пресликавање еуклидских простора – ова дефиниција не зависи од избора локалних координата. Ако је многострукост класе C^k, услов (1) нам омогућава да дефинишемо глатка пресликавања класе C^k; ако посебно не напоменемо другачије, под термином глатких пресликавања називамо пресликавања класе C^∞. Скуп свих глатких пресликавања $F : N \to M$ класе $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ означавамо са $C^k(N, M)$. Скупови $C^k(N, M)$ могу на више природних начина да се снабдеју топологијом, тако да функције мањег степена глаткости могу произвољно добро да се апроксимирају функцијама већег степена глаткости (детаљи могу да се виде нпр. у [**35**]). Следећа теорема показује да хомотопска својства непрекидних пресликавања могу довољно добро да се опишу изучавањем глатких.

Теорема 1. *За свако непрекидно пресликавање $F : N \to M$ постоји глатко пресликавање $G \in C^\infty(N, M)$ које је је хомотопски еквивалентно F.*

Специјално, ако је $M = \mathbb{R}$ говоримо о *глатким функцијама* на N; скуп глатких функција означавамо, осим са $C^\infty(N, \mathbb{R})$, и са $C^\infty(N)$. Ако је $N = I$ интервал у $\mathbb{R}$ *глатким кривама* на M називамо глатка пресликавања

$$\gamma : I \to M.$$

Нека су f и g две функције, дефинисане и глатке у некој (не обавезно истој) отвореној околини тачке $p \in M$; назовимо их еквивалентним ако им се рестрикције на неку мању околину поклапају. Другим речима, $f \sim g$ ако и само ако постоји отворена околина $V \ni p$, таква да је $f\big|_V = g\big|_V$. Скуп класа еквиваленције у односу на ову релацију означавамо са $C^\infty(p)$. Множење функција скаларом и сабирање и множење функција по тачкама преносе се на класе еквиваленције, па је скуп $C^\infty(p)$ алгебра над пољем $\mathbb{R}$.

Нека је $I \subset \mathbb{R}$ отворени интервал који садржи нулу и $\gamma : I \to M$ глатка крива, таква да је $\gamma(0) = p$. Нека је функција f дефинисана и глатка у некој околини тачке p и $[f]$ њена класа еквиваленције у $C^\infty(p)$. Композиција

$$f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$$

је глатка реална функција једне реалне променљиве и њен извод у нули је реални број. Пресликавање

$$X_\gamma : C^\infty(p) \to \mathbb{R}, \qquad X_\gamma([f]) = (f \circ \gamma)'(0) \tag{4}$$

је добро дефинисано (тј. независно од избора представника f класе $[f]$) линеарно пресликавање. Различите криве γ могу да дефинишу исто пресликавање

X_γ. Сем тога, није свако линеарно пресликавање $X : C^\infty(p) :\to \mathbb{R}$ добијено на овај начин од неке криве γ; она која јесу, задовољавају Лајбницово правило

$$X(f \cdot g) = X(f)g(p) + f(p)X(g). \tag{5}$$

Дефиниција 2. Скуп линеарних пресликавања $X : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ која задовољавају Лајбницово правило (5) назива се *тангентним простором* многострукости M у тачки p и означава са T_pM. Унија свих тангентних простора назива се *тангентним раслојењем* и означава са TM.

Пример 1. Нека је M отворен подскуп у $\mathbb{R}^n$ са координатама $(x_1, \ldots, x_n)$ и $p \in M$. Парцијални изводи

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{x=p} : C^\infty(p) \to \mathbb{R}, \quad j \in \{1, \ldots, n\} \tag{6}$$

су линеарна пресликавања и задовољавају Лајбницово правило. Може да се покаже да је свако линеарно пресликавање $C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ које задовољава Лајбницово правило линеарна комбинација пресликавања (6). Другим речима, тангентни простор T_pM је векторски простор димензије n са базом (6).

Специјално, за $n = 1$, ако је I отворени интервал у $\mathbb{R}$ и $t_0 \in I$, $T_{t_0}I$ је једнодимензиони векторски простор генерисан вектором $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}$. ♯

Задатак 1. Кажемо да се две глатке криве $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^n$ *тангентно додирују* у тачки p ако је

$$\alpha(0) = \beta(0) = p \quad \text{и} \quad \frac{d\alpha}{dt}(0) = \frac{d\beta}{dt}(0). \tag{7}$$

Назовимо криве α и β еквивалентним ако задовољавају (7). Доказати да је тиме добро дефинисана релација еквиваленције на скупу глатких кривих које пролазе кроз тачку p. Доказати да за криве криве α и β које задовољавају (7) важи

$$X_\alpha = X_\beta,$$

где су X_α и X_β оператори дефинисани са (4). Извести одатле закључак да тангентни простор $T_p\mathbb{R}^n$ може да се дефинише као скуп класа екиваленције кривих које пролазе кроз тачку p. ✓

Задатак 2. Нека је M глатка многострукост. Кажемо да се две глатке криве $\alpha, \beta : I \to M$ *тангентно додирују* у тачки $p \in M$ ако се оне тангентно додирују у некој карти, као што је дефинисано у Задатку 1. Доказати да се онда оне тангентно додирују у свакој карти, и да је тиме добро дефинисана релација еквиваленције на скупу глатких кривих које пролазе кроз тачку p. Доказати да тангентни простор T_pM може да се дефинише као скуп класа еквиваленције кривих које пролазе кроз тачку $p \in M$. ✓

Скуп линеарних пресликавања има структуру векторског простора, па је сваки тангентни простор T_pM векторски простор. Објекте дуалне тангентном простору и тангентном раслојењу издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 3. Дуал векторског простора T_pM, тј. простор T_p^*M свих линеарних пресликавања $T_pM \to \mathbb{R}$ назива се *котангентним простором* многострукости M у тачки p. Унија свих котангентних простора назива се *котангентним раслојењем* и означава са T^*M. ♢

Извод глатког пресликавања (3) у тачки $q \in N$ дефинишемо као линеарно пресликавање

$$DF(q) : T_qN \to T_{F(q)}M, \qquad DF(q)(X)(f) = X(f \circ F), \tag{8}$$

за $X \in T_qN$ и $f \in C^\infty(F(q))$. Уз DF, за ознаку извода пресликавања F користимо и ознаку F_*, док $f \circ F$ означавамо са F^*f, тако да дефиницију извода (8) можемо да запишемо и као

$$F_*X(f) = X(F^*f).$$

(уместо $F_*(p)(X)$ пишемо и само F_*X кад нема потребе да наглашавамо p). Специјално, ако је (U, φ) координатна карта, оператори диференцирања по координатама

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \in T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$$

представљају базу тангентног простора еуклидског простора, а њихове слике

$$\varphi_*^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \varphi_*^{-1}\frac{\partial}{\partial x_n} \in T_pM$$

базу у T_pM.

Пример 2. Наравно, овако дефинисани појмови уопштавају познате појмове из диференцијалног рачуна у $\mathbb{R}^n$. На пример, нека је I интервал у $\mathbb{R}$ и $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ глатка крива у $\mathbb{R}^n$. Објекат дефинисан изразом (8) (при чему је овде $F = \gamma$, $N = I$ и $M = \mathbb{R}^n$) је стандардни извод у $\mathbb{R}^n$:

$$\gamma_*(t)\frac{d}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}(t),$$

или, краће,

$$\gamma_*\frac{d}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}.$$

Општије, ако је $\gamma : I \to M$ глатка крива на глаткој многострукости M, са $\frac{d\gamma}{dt}$ или $\gamma'(t)$ означавамо тангентни вектор $\gamma_*\frac{d}{dt} \in T_{\gamma(t)}M$. ♯

Дефиниција 4. Подскуп $N \subset M$ је *глатка подмногострукост* многострукости M ако постоји многострукост S и глатко пресликавање $\jmath : S \to M$такво да важи:

(1) $\jmath$ је хомеоморфизам скупа S на $\jmath(S)$ у релативној топологији;

(2) извод $\jmath_*(s) : TsS \to T_{\jmath(s)}M$ је инјективно пресликавање за свако $s \in S$.

Пресликавање $\jmath$ које задовољава ове услове називамо *улагањем.* ♢

Свака подмногострукост има структуру глатке многострукости – из Теореме о рангу следи да свака тачка $p \in N = \jmath(S)$ има координатну околину U у којој се $N \cap U$ задаје координатама $(x_1, \dots, x_{\dim S}, 0, \dots, 0)$.

Пример 3. Крива $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\}$ има глатку параметризацију $x = t^2$, $y = t^3$: пресликавање

$$\imath : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad \imath(t) = (t^2, t^3)$$

је глатко и дефинише хомеоморфизам реалне праве на C. То значи да је C глатка многострукост, која може да се покрије једном картом (тако да је услов да је (1) дифеоморфизам таутологија).

Међутим, C није *подмногострукост* у $\mathbb{R}^2$ у смислу Дефиниције 4. Пресликавање $\imath$ није улагање, јер је $\imath'(0) = 0$. Наравно, то није довољно за закључак да крива C није подмногострукост – треба доказати да не постоји нека друга њена параметризација која је улагање. Нека је

$$\jmath :]s-\delta, s+\delta[\to \mathbb{R}^2, \quad \jmath(]s-\delta, s+\delta[) \subset C, \quad \jmath(s) = (0,0)$$

произвољна глатка параметризација криве C у околини координатног почетка. Ако је $\jmath(t) = (x(t), y(t))$, онда је

$$\jmath_*(t)\frac{d}{dt} = (x'(t), y'(t)).$$

Крива C има хоризонталну тангенту у координатном почетку, па је $y'(s) = 0$. Пошто је $\jmath$ бијекција, x' мења знак у тачки s. Из непрекидности првог извода следи $x'(s) = 0$. Другим речима, важи $\jmath_*(s) = 0$, па није испуњен други услов у Дефиницији 4. $\sharp$

Ако је (U, φ) локална карта, ϕ^{-1} се назива *локалном параметризацијом* и уопштава параметарске једначине кривих и површи у еуклидском простору. Као што знамо, криве и површи могу да се задају и експлицитним једначинама (нпр. $x^2 + y^2 = 1$ је екцплицитна, а $x = \cos t$, $y = \sin t$ параметарска једначина круга). Експлицитне једначине кривих и површи уопштава следећа теорема, чији доказ следи из Теореме о рангу.

Теорема 2. *Нека је N глатка многострукост димензије n, M глатка многострукост димензије m, и $F : N \to M$ глатко пресликавање, чији извод*

$$F_*(p) : T_pN \to T_{F(p)}M$$

има константан ранг k у свакој тачки $p \in N$. Тада је за свако $q \in M$ скуп $F^{-1}(q)$ глатка подмногострукост многострукости N, димензије $n - k$.

Дефиниција 5. Тачка $p \in N$ је *сингуларна тачка* пресликавања $F : N \to M$ ако извод $F_*(p)$ у тој тачки није сурјективан; вредност $F(p)$ у сингуларној тачки је *сингуларна вредност.* Тачка $q \in M$ је *регуларна вредност* ако није сингуларна. $\Diamond$

Треба имати на уму да су и тачке скупа $M \setminus F(N)$, по овој дефиницији, регуларне вредности.

Последица 1. *Ако је $q \in M$ регуларна вредност пресликавања $F : N \to M$, онда је $F^{-1}(q)$ или празан скуп или глатка подмногострукост димензије* $\dim N - \dim M$.

$\triangle$ Ако је пресликавање $F_*(p_0)$ сурјективно, онда је сурјективно и $F_*(p)$ за p у некој околини тачке q_0, па можемо да применимо Теорему 2 на рестрикцију $F : U \to M$. $\triangledown$

Последица 2. *Ако је N глатка многострукост и $f : N \to \mathbb{R}$ глатко пресликавање, онда је за сваке две регуларне вредности $a, b \in \mathbb{R}$ скуп $f^{-1}([a,b])$ глатка многострукост са границом $\{f^{-1}(a)\} \cup \{f^{-1}(b)\}$.*

$\triangle$ Скуп $f^{-1}(]a,b[)$ је отворен у N, одакле следи да је он многострукост димензије $n = \dim N$. Из Теореме о рангу следи да за свака тачка $p \in \{f^{-1}(a)\} \cup \{f^{-1}(b)\}$ има координатну околину U у којој f има запис

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1.$$

Одатле следи да је скуп $f^{-1}([a,b]) \cap U$ хомеоморфан отвореном подскупу полупростора $\{x_1 \leq 0\}$. $\triangledown$

Последица 3. *Ако је N многострукост са границом ∂N, $F : N \to M$ глатко пресликавање и $q \in M$ регуларна вредност пресликавања F и његове рестрикције $F\big|_{\partial N}$ на границу ∂N. Тада је $F^{-1}(q)$ подмногострукост са границом $\partial N \cap F^{-1}(q)$.*

$\triangle$ Нека је $p \in F^{-1}(q)$. Ако p није на граници ∂N, у некој њеној околини можемо да применимо Последицу 1. Претпоставимо да је $p \in \partial N$, изаберимо координатне околине тачака p и q, такве да је у њима $p = 0$, $q = 0$. При томе је околина тачке p отворен подскуп у полупростору $\mathbb{H}^n = \{x_1 \le 0\}$, али по дефиницији глатког пресликавања на рубу, F може да се прошири до пресликавања $\widetilde{F}$ које је глатко на отвореној околини нуле у $\mathbb{R}^n$. Смањујући ту околину ако је потребно, претпоставимо да су све њене тачке регуларне тачке пресликавања $\widetilde{F}$. Одатле следи да је $\widetilde{F}^{-1}(0)$ глатка подмногострукост димензије $n - m$. Посматрајмо пројекцију

$$\pi : \widetilde{F}^{-1}(0) \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1.$$

Тачка $0 \in \mathbb{R}$ је њена регуларна вредност – у противном би било

$$T_0\widetilde{F}^{-1}(0) \subset \{x_1 = 0\}.$$

Пошто је $T_0\widetilde{F}^{-1}(0) = \ker \widetilde{F}_*(0)$, одатле би следило да је

$$\dim(\operatorname{im}(F\big|_{\{x_1=0\}})_*(0) = n - 1 - \ker \widetilde{F}_*(0) = n - 1 - (n - m) = m - 1,$$

што је у супротности са претпоставком да је тачка $q \in M$ (тј. тачка $0 \in \mathbb{R}^m$ у нашим координатама) регуларна вредност рестрикције рестрикције $F\big|_{\partial N}$. Доказ сада следи из Последице 2, примењене на функцију $f = \pi$. $\bigtriangledown$

Пример 4. Сфера $\mathbb{S}^n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ је подмногострукост у $\mathbb{R}^{n+1}$ јер је ранг извода пресликавања

$$\mathbb{R}^{n+1} \ni (x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 \in \mathbb{R}$$

једнак 1 у околини $\mathbb{S}^n$. $\sharp$

Пример 5. Извод пресликавања $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x^3 - y^2$ нема константан ранг: његов ранг је 0 у координатном почетку, а 1 у свим осталим тачкама. Пошто је $F(0, 0) = 0$, следи да је 0 једина сингуларна вредност овог пресликавања, одакле следи да је за свако $t \neq 0$ скуп $F^{-1}(t) = \{x^3 - y^2 = t\}$ глатка подмногострукост у $\mathbb{R}^2$. У Примеру 3 смо видели да скуп $F^{-1}(0)$ није подмногострукост у амбијенту $\mathbb{R}^2$, иако сам за себе допушта структуру глатке многострукости. $\sharp$

Следећа теорема показује да су скоро све вредности глатког пресликавања регуларне. Пре него што је формулишемо, дефинисаћемо шта то значи „скоро све”.

Дефиниција 6. Подскуп $A \subset M$ глатке многострукости је скуп *мере нула*, ако је за сваку карту (U, φ) подскуп $\varphi(A \cap U) \subset \mathbb{R}^{\dim M}$ скуп Лебегове мере нула. Неко својство важи за *скоро све* тачке многострукости M, или *скоро свуда на* M, ако је скуп тачака које немају то својство мере нула. $\diamondsuit$

Претходна дефиниција је оправдана из два разлога. Први је тај што, на основу Теореме о средњој вредности, глатко пресликавање слика скуп мере нула у скуп мере нула. Други је тај што многострукост може да се покрије са пребројиво много карата, па је претходна дефиниција сагласна са дефиницијом Лебегове мере нула у случају $M = \mathbb{R}^m$, јер је пребројива унија скупова мере нула скуп мере нула.

Теорема 3. (Сардова) *Скуп сингуларних вредности глатког пресликавања $F : N \to M$ је скуп мере нула.*

Последица 4. *Ако је N компактна глатка многострукост са границом ∂N, не постоји глатка ретракција*[3] $F : N \to \partial N$.

$\triangle$ Из Сардове теореме следи да постоји регуларна вредност $q \in \partial N$ пресликавања F. Она је свакако и регуларна тачка рестрикције $F\big|_{\partial N} = \mathrm{id}_{\partial N}$. Из Последице 3 следи да је $F^{-1}(q)$ компактна једнодимензиона подмногострукост у N, чија је граница подмногострукост у ∂N. Пошто је $F^{-1}(y_0) \cap \partial N = \{y_0\}$, та граница се састоји од једне тачке, што је контрадикција пошто једнодимензиона многострукост има паран број тачака на граници. $\bigtriangledown$

Последица 5. (Брауерова теорема о фиксној тачки) *Свако глатко пресликавање $G : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ лопте на себе има фиксну тачку.*

$\triangle$ У противном би пресликавање које тачку $x \in \mathbb{B}^n$ слика у пресечну тачку полуправе која полази из тачке x и спаја је са $G(x)$ са сфером $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$ било глатка ретракција лопте на сферу, што је у супротности са Последицом 4. $\bigtriangledown$

Напомена 1. У формулацији Теореме 3, као и свуда у овом тексту, под глаткошћу подразумевамо глаткост класе C^∞. Постоји и прецизнија верзија Сардове теореме: *Ако је $F : N \to M$ пресликавање класе C^k и ако је $k \geq \max\{\dim N - \dim M + 1, 1\}$, скуп његових сингуларних вредности је скуп мере нула.* $\diamond$

Пример 6. (Хомотопске групе сфере) Нека је $p \in M$ фиксирана тачка на глаткој многострукости M и $s \in \mathbb{S}^k$ фиксирана тачка на екватору сфере димензије k. Скуп свих хомотпских класа непрекидних пресликавања $f : \mathbb{S}^k \to M$ таквих да је $f(s) = p$ назива се *k–том хомотопском групом* многострукости M и означава са $\pi_k(M; p)$. Операција у овој групи се дефинише на врло природан, геометријски начин. Нека су $f_1, f_2 : \mathbb{S}^k \to M$ два пресликавања. Да бисмо дефинисали пресликавање $f_1 + f_2$, приметимо да ако све тачке екватора сфере идентификујемо, добијемо две сфере исте димензије, које се додирују у једној тачки. Пресликавање $f_1 + f_2$ дефиншемо тако да буде једнако f_1 на једној, а f_2 на другој од те сфере. Тако добијамо пресликавање $f_1 + f_2 : \mathbb{S}^k \to M$, које слика цео екватор у тачку p.

Специјално, $\pi_1(M; p)$ је *фундаментална група* многострукости M. Ово је једина хомотопска група која не мора да буде комутативна; за $k \geq 2$ групе $\pi_k(M; p)$ су Абелове. Ако је M повезана многострукост и $p_1, p_2 \in M$, групе $\pi_k(M; p_1)$ и $\pi_k(M; p_2)$ су изоморфне[4], па често користимо краћу ознаку $\pi_k(M)$. Лако се види да хомотопски еквивалентне многострукости имају изоморфне хомотопске групе.

Из Сардове теореме следи да је

$$\pi_k(\mathbb{S}^n) = 0 \quad \text{за} \quad k < 1,$$

[3] $f : X \to A$ је *ретракција* скупа X на скуп $A \subset X$ ако је $f(a) = a$ за све $a \in A$.

[4] Овај изоморфизам није канонски; конструише се уз помоћ пута који спаја тачке p_1 и p_2 и у општем случају зависи од тог пута.

или, другим речима, да је свако непрекидно пресликавање $f : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ хомотопно константном. Заиста, због Теореме 1 можемо да претпоставимо да је f глатко, а из Сардове теореме следи да су скоро све тачке из $\mathbb{S}^n$ његове регуларне вредности. Због $k < n$ једине тачке које су регуларне вредности су оне које нису у слици $\mathrm{im}(f)$. Нека је $c \in \mathbb{S}^n \setminus \mathrm{im}(f)$ једна таква тачка и $-c$ њој антиподална тачка. Хомотетија са центром у c даје тражену хомотопију која пресликавање f деформише у константно пресликавање $f_1 \equiv -c$.

Може да се покаже да је $\pi_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$. Познате су и неке, али не све, хомотопске групе $\pi_k(\mathbb{S}^n)$ за $k > n$. $\sharp$

Следећа дефиниција нам омогућава да формулишемо услов под којим је пресек две подмногострукости подмногострукост.

Дефиниција 7. Кажемо да су подмногострукости $R, S \subset M$ *трансверзалне*, или *налазе у општем положају*, ако је или $R \cap S = \emptyset$, или

$$T_pR + T_pS = T_pM$$

за све $p \in R \cap S$. $\Diamond$

Задатак 3. Испитати трансверзалност подмногострукости $R, S \subset M$ у следећим случајевима:

(а) $M = \mathbb{R}^3$, R је xy–раван, S је z–оса;

(б) $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $R = \{0\} \times \mathbb{R}^n$, $S = \Delta$ (дијагонала);

(в) $M = \mathbb{R}^{n \times n}$ (скуп свих матрица $n \times n$), R је скуп симетричних матрица, S је скуп кососиметричних матрица;

(г) $M = \mathbb{R}^3$, $R = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$, $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\}$, $\rho \in \mathbb{R}$. $\checkmark$

Теорема 4. *Ако су R и S трансверзалне подмногострукости многострукости M, онда је $R \cap S$ или празан скуп, или подмногострукост димензије* $\dim R + \dim S - \dim M$ *(другим, лакшим за памћење, речима,* $\operatorname{codim}(R \cap S) = \operatorname{codim} R + \operatorname{codim} S$*).*

$\triangle$ Ако је $m = \dim M$, $r = \dim R$, $s = \dim S$, у некој околини U тачке $p \in R \cap S$ многострукост R може да се зада једначином $f(x) = 0$, за неку функцију $f : U \to \mathbb{K}^{m-r}$, а S једначином $g(x) = 0$ за неку функцију $g : U \to \mathbb{K}^{m-s}$, при чему је 0 регуларна вредност обе функције. Из претпоставке о трансверзалности следи да је $(0, 0)$ регуларна вредност функције $(f, g) : U_0 \to \mathbb{K}^{m-r} \times \mathbb{K}^{m-s}$ за довољно мали подскуп $U_0 \subset U$, па доказ следи из Последице 1. $\triangledown$

Задатак 4. Нека је $F : N \to M$ глатко пресликавање. Доказати да је график

$$\Gamma_F := \{(q, F(q)) \mid q \in N\}$$

глатка подмногострукост многострукости $N \times M$. $\checkmark$

Теорема 4 може да се уопшти.

Дефиниција 8. Пресликавања $F : R \to M$ и $G : S \to M$ су *трансверзална* ако је $F(R) \cap G(S) = \emptyset$ или ако је

$$F_*(a)T_aR + G_*(b)T_bS = T_pM$$

За све a, b, p, такве да је $F(a) = G(b) = p$.

Специјално, пресликавање $F : R \to M$ је *трансверзално на подмногострукост* $S \subset M$ ако су F и инклузија $j_S : S \hookrightarrow M$ трансверзална пресликавања. $\Diamond$

Приметимо да је појам регуларне вредности специјалан случај трансверзалности: тачка $q \in M$ је регуларна вредност пресликавања $F : N \to M$ ако и само ако је F трансверзално на подмногострукост $\{q\}$. Следећа теорема је уопштење Последице 1.

Теорема 5. *Нека су $F : R \to M$ и $G : S \to M$ трансверзална пресликавања. Тада је*

$$R \times_M S := \{(a, b) \in R \times S \mid F(a) = G(b)\}$$

глатка подмногострукост у $R \times S$. Специјално, ако је S подмногострукост у M, а пресликавање $F : R \to M$ трансверзално на S, онда је $F^{-1}(S)$ подмногострукост у R.

$\triangle$ Ова теорема може да се сведе на Теорему 4 посматрањем графика

$$\Gamma_F \subset R \times M \qquad \text{и} \qquad \Gamma_G \subset S \times M$$

пресликавања F и G и доказом да је пресек подмногострукости $\Gamma_F \times \Gamma_G$ и $R \times S \times \Delta_M$ (где је $\Delta_M := \{(p, p) \mid p \in M\}$ дијагонала у $M \times M$) у многострукости $R \times S \times M \times M$ трансверзалан. $\bigtriangledown$

Задатак 5. Нека су R и S подмногострукости у M, такве да је и $R \cap S$ подмногострукост.

(а) Да ли одатле следи да се R и S секу трансверзално?

(б) Ако је при томе и $\dim (R \cap S) = \dim R + \dim S - \dim M$, да ли одатле следи да се R и S секу трансверзално? ✓

Уопштење Сардове теореме су следеће две теореме. Ради једноставније формулације, претпоставимо да је многострукост M утопљена у еуклидски простор $\mathbb{R}^{m_0}$ и да је $\|\cdot\|$ норма на том простору, а $\|\cdot\|_\infty$ из ње изведена sup–норма на простору пресликавања $M \to \mathbb{R}^{m_0}$.

Теорема 6. *Нека су M и R глатке многострукости, $S \subset M$ подмногострукост задата улагањем $\jmath : S \hookrightarrow M$ и $F : R \to M$ глатко пресликавање. Тада постоји улагање $\jmath_\varepsilon : S \hookrightarrow M$ такво да је F трансверзално на $\jmath_\varepsilon$ и $\|\jmath - \jmath_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$.*

Теорема 7. *Нека су M и R глатке многострукости и нека је $S \subset M$ подмногострукост. За свако глатко пресликавање $F : R \to M$ постоји глатко пресликавање $F_\varepsilon : R \to M$ које је трансверзално на S и хомотопно пресликавању F, такво да је $\|F - F_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$.*

Може да се покаже да су претходне две теореме еквивалентне; свака од њих је позната као *Теорема о трансверзалности.*

Пример 7. Не постоје уланчани кругови у $\mathbb{R}^n$ за $n \geq 4$. Заиста, нека су дати кругови $C_1 = \gamma_1(\mathbb{S}^1)$ и $C_2 = \gamma_2(\mathbb{S}^1)$ и нека је D_1 диск са границом C_1. По теореми о трансверзалности, малом деформацијом можемо да доведемо D_1 у трансверзалан положај у односу на C_2. Пошто је $\dim C_2 + \dim D_1 = 3 < 4$, трансверзалност је еквивалентна дисјунктности, што значи да C_1 и C_2 нису уланчани. $\sharp$

Тангентно раслојење TM има структуру глатке многострукости димензије $2 \dim M$, са картама дефинисаним помоћу пресликавања $\varphi \times \varphi_*$.

Векторско поље на многострукости M је глатка фамилија тангентних вектора на њој, тј. глатко пресликавање $X : M \to TM$, са својством да је

$X(p) \in T_pM$ за свако $p \in M$. Уместо $X(p)$ чешће пишемо X_p. Скуп свих векторских поља на M означавамо са $\mathcal{X}(M)$. Овај скуп је векторски простор, у односу на операције множења скаларом и сабирања векторских поља по тачкама: $(aX + bY)_p := aX_p + bY_p$. Општије: $\chi(M)$ је модул над прстеном $C^\infty(M)$ глатких функција на M.

Сем тога, скуп $\mathcal{X}(M)$ има и структуру алгебре, дефинисану множењем

$$[X, Y] = XY - YX, \tag{9}$$

тј. комутатором линеарних оператора: $[X, Y]$ дејствује на $C^\infty(p)$ по правилу

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf). \tag{10}$$

Израз $[X, Y]$ назива се *Лијевим заградама.* Приметимо да сабирци XY и YX на десној страни у (9), у општем случају, *нису* векторска поља, јер композиција не задовољава Лајбницово правило (5), али га комутатор задовољава. Приметимо још и да је комутатор дефинисан за векторска поља, а не за векторе, јер први сабирак на десној страни у (10) има смисла само ако је израз Yf (на који се примењује оператор X_p) функција (и слично за други сабирак).

Лијеве заграде су билинеарне, антисиметричне ($[X, Y] = -[Y, X]$) и задовољавају *Јакобијев идентитет*

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0. \tag{11}$$

Задатак 6. Доказати да за векторска поља

$$X = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad Y = \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

у $\mathbb{R}^n$ важи

$$[X, Y] = \sum_{1 \le j,k \le n} \left(a_j \frac{\partial b_k}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

✓

Теорема 8. *Нека је $F : N \to M$ глатко пресликавање и нека су $X, Y \in \mathcal{X}(N)$ векторска поља на N. Тада је*

$$F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y].$$

$\triangle$ $F_*[X, Y]f = [X, Y](f \circ F) = X(Y(f \circ F)) - Y(X(f \circ F)) = X((F_*Yf) \circ F) - Y((F_*Xf) \circ F) = F_*X(F_*Yf) - F_*Y(F_*Xf) = [F_*X, F_*Y]f.$ $\triangledown$

Векторско поље X на многострукости M задаје диференцијалну једначину

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = X(\gamma(t)), \qquad \gamma(0) = p,$$

чије је решење крива кроз p. Подсетимо се следеће, класичне, теореме из теорије диференцијалних једначина.

Теорема 9. *Нека је $U \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп и нека је*

$$X :]-\varepsilon, \varepsilon[\times U \to \mathbb{R}^n, \qquad X(t, x_1, \ldots, x_n) = (f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n))$$

пресликавање класе C^∞. Тада за свако $x \in U$ постоје отворена околина $V \ni x$, $V \subset U$, и број $\delta > 0$, такви да за свако $p \in V$ постоји пресликавање

$$\gamma_p :]-\delta, \delta[\to U, \qquad \gamma_p(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

класе C^∞, које је решење диференцијалне једначине

$$\frac{d\gamma_p}{dt} = X(t,\gamma(t)), \qquad \gamma_p(0) = p, \tag{12}$$

односно, написано у координатама, система

$$\frac{dx_k}{dt}(t) = f_k(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)), \qquad x_k(0) = p_k, \qquad 1 \le k \le n.$$

Ово решење је јединствено, у смислу да се свако решење које задовољава (12) подудара са γ у некој околини нуле. Тиме је дефинисано пресликавање

$$(t,p) \mapsto \gamma_p(t)$$

које је класе C^∞ по обе променљиве.

Будући да је претходно тврђење локалног карактера, оно може да се реформулише без координата, на језику векторских поља на многострукости.

Теорема 10. *Нека је X_t глатка (по $t \in \mathbb{R}$) фамилија глатких векторских поља на многострукости M. Тада за свако $p \in M$ постоје отворена околина $V \ni p$ и број $\delta > 0$, такви да постоји глатко пресликавање*

$$\phi :]-\delta, \delta[\times V \to M, \qquad (t,x) \mapsto \phi_t(x)$$

које задовољава једначину

$$\frac{d\phi_t}{dt}(x) = X_t(\phi_t(x)), \qquad \phi_0(x) = x. \tag{13}$$

Специјално, ако је X векторско поље (које не зависи од t), а многострукост M компактна[5], решење једначине (13) је *једнопараметарска група дифеоморфизама*, тј. фамилија дифеоморфизама $\phi_t : M \to M$ која задовољава

$$\phi_{s+t} = \phi_s \circ \phi_t. \tag{14}$$

Другим речима, у случају *аутономног динамичког система* (тј. векторског поља које не зависи од t), једначина (13) дефинише морфизам адитивне групе $(\mathbb{R}, +)$ у групу $(\mathrm{Diff}\,(M), \circ)$ дифеоморфизама многострукости M. Ово следи из јединствености решења диференцијалне једначине и чињенице да $t \mapsto \phi_{s+t}$ и $t \mapsto \phi_s \circ \phi_t$ задовољавају исту диференцијалну једначину са истим почетним условима.

Нека је U околина нуле у $\mathbb{R}^n$, $X : U \to \mathbb{R}^n$ глатко векторско поље. Претпоставимо да је $X_0 \ne 0$ и изаберимо координате $(x_1, \ldots, x_n)$ тако да је

$$X_0 = (1, 0, \ldots, 0).$$

Пошто је X глатко, следи да је $X \ne 0$ у некој околини нуле. Нека је $\phi_t(x)$ интегрална крива одређна почетним условом $\phi_0(x) = x$, тј.

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = X(\phi_t(x)), \qquad \phi_0(x) = x. \tag{15}$$

Пресликавање

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \phi_{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n)$$

[5]Компактност многострукости M нам омогућава да решење диференцијалне једначине продужимо на целу реалну праву $\mathbb{R}$; ово је класичан резултат из теорије диференцијалних једначина. Векторско поље чије су интегралне криве дефинисане на целом скупу $\mathbb{R}$ назива се *комплетним*; компактност носача је довољан (не и неопходан) услов комплетности.

је дефинисано у некој околини нуле. Из (15) следи

$$h_*\frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{\partial h}{\partial x_1}=X(h),\qquad h(0,x_2,\ldots,x_n)=(0,x_2,\ldots,x_n).$$

Пошто је $X\neq 0$, одатле следи да је h локални дифеоморфизам у некој околини нуле. За његов инверз $\varphi=h^{-1}$ важи $\varphi_*X=\frac{\partial}{\partial x_1}$

Тиме смо доказали следеће тврђење (приметимо да је оно локалног карактера, па га доказују ова наша разматрања у $\mathbb{R}^n$):

Теорема 11. (О исправљивости векторских поља) *Нека је X глатко векторско поље на глаткој многострукости M. Тада свака тачка $p\in M$ у којој је $X_p\neq 0$ има координатну околину (U,φ), такву да је $\varphi_*X=\frac{\partial}{\partial x_1}$.*

Објекти дуални векторским пољима називају се *ковекторским пољима* или *диференцијалним 1–формама.* Прецизније, слично тангентном раслојењу, и котангентно раслојење T^*M има структуру глатке многострукости димензије $2\dim M$: ако је φ локална карта на M, а φ^* линеарно пресликавање дуално изводу φ_*, онда је $\varphi\times\varphi^*$ локална карта на T^*M. *Ковекторско поље* или *диференцијална 1–форма* на M је глатко пресликавање $\eta : M\to T^*M$ које задовољава услов$\eta(p)\in T_p^*M$ за свако $p\in M$. Уместо $\eta(p)$ некад пишемо и η_p. Скуп свих диференцијалних 1–форми на M означавамо са $\Omega^1(M)$.

Као што векторска поља у локалним координатама могу да се напишу као линеарне комбинације векторских поља $\frac{\partial}{\partial x_j}$, тако и свака диференцијална 1–форма у локалним координатама има облик

$$\eta_x=\sum_{j=1}^{\dim M}a_j(x)dx_j,\qquad x=(x_1,\ldots,x_{\dim M})\in\mathbb{R}^{\dim M}.$$

За $\alpha,\beta\in\Omega^1(M)$ и $p\in M$ помоћу

$$\alpha_p\wedge\beta_p(X_p,Y_p)=\begin{vmatrix}\alpha_p(X_p) & \alpha_p(Y_p)\\ \beta_p(X_p) & \beta_p(Y_p)\end{vmatrix}$$

је дефинисано антисиметрично билинеарно пресликавање

$$\alpha_p\wedge\beta_p : T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}.$$

Операцију $\wedge$ називамо *спољашњим* (или *клинастим*) *производом.*

Пресликавање $\zeta : p\mapsto\zeta_p$ која свакој тачки $p\in M$ придружује антисиметрично билинеарно пресликавање $\zeta_p : T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$ и које је глатко[6] назива се *диференцијалном 2–формом.* Скуп свих диференцијалних 2–форми на M означава се са $\Omega^2(M)$.

Скуп антисиметричних билинеарних пресликавања (тј. скуп антисиметричних матрица) на векторском простору димензије n је векторски простор димензије $\binom{n}{2}$. Одатле лако следи да свака диференцијална 2–форма ζ у локалним координатама има запис

$$\zeta_x=\sum_{j,k=1}^{\dim M}a_{j,k}(x)dx_j\wedge dx_k.$$

[6]У смислу да је за свака два глатка векторска поља X,Y пресликавање $M\ni p\mapsto\zeta_p(X_p,Y_p)\in\mathbb{R}$ глатко.

У користећи релације

$$dx_j \wedge dx_k = -dx_k \wedge dx_j \tag{16}$$

које следе из антисиметричности детерминанте по колонама, претходни израз можемо да запишемо у облику

$$\zeta_x = \sum_{1 \le j < k \le \dim M} b_{j,k}(x) dx_j \wedge dx_k \tag{17}$$

за неке функције $c_{j,k}$.

Слично се дефинише клинасти производ k диференцијалних 1–форми и добија антисиметрично k–линеарно пресликавање. На пример,

$$\alpha_p \wedge \beta_p \wedge \gamma_p(X_p, Y_p, Z_p) = \begin{vmatrix} \alpha_p(X_p) & \alpha_p(Y_p) & \alpha_p(Z_p) \\ \beta_p(X_p) & \beta_p(Y_p) & \beta_p(Z_p) \\ \gamma_p(X_p) & \gamma_p(Y_p) & \gamma_p(Z_p) \end{vmatrix}$$

за 1–форме α, β, γ је антисиметрично 3–линеарно пресликавање. Тако добијамо дефиницију *диференцијалних k–форми.*

Дефиниција 9. *Диференцијалне k–форме* (или, краће, *k–форме*) на M су глатка (у смислу претходне фусноте) пресликавања која свакој тачки $p \in M$ придружују антисиметрично k–линеарно пресликавање на T_pM. Скуп свих k–форми на M означава се са $\omega^k(M)$. За $k = 0$ је, по дефиницији $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ а за $k < 0$ $\Omega^k(M) = \{0\}$. $\diamondsuit$

Приметимо да је $\Omega^k(M) = \{0\}$ за $k > \dim M$, због антисиметричности. Димензија простора антисиметричних k–линеарних пресликавања на векторском простору димензије n је $\binom{n}{k}$. Дакле $\Omega^k(M)$ је модул над прстеном $C^\infty(M)$ ранга $\binom{n}{k}$. Слично као у (17), добијамо израз за локални запис k–форме ξ

$$\xi_x = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k k \le \dim M} b_{j_1,\ldots,j_k}(x) dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}, \tag{18}$$

где су $b_{j_1,\ldots,j_k}$ глатке функције. Користећи овај израз можемо да проширимо множење $\wedge$ на билинеарно над $C^\infty(M)$ пресликавање

$$\wedge : \Omega^j(M) \times \Omega^k(M) \to \Omega^{j+k}(M).$$

Пресликавање $F : M \to N$ индукује пресликавање (извод)

$$F_* : TM \to TN,$$

а тиме и пресликавање

$$F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M), \quad F^*\eta(X^1, \ldots, X^k) := \eta(F_*(X^1, \ldots, X^k).$$

Лако се проверава да важи

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta.$$

Нека је $G : L \to M$ још једно глатко пресликавање. Из правила за извод сложене функције $(F \circ G)_* = F_* \circ G_*$ следи

$$(F \circ G)^* = G^* \circ F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(L). \tag{19}$$

Ако су $(x_1, \ldots, x_m)$ локалне координате на M, а $(y_1, \ldots, y_n)$ на N и $F = (f_1, \ldots, f_n)$, или, прецизније,

$$F(x_1, \ldots, x_m) = (f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots f_n(x_1, \ldots, x_m))$$

запис пресликавања F у тим локалним координатама , онда је

$$F^* dy_j = df_j = \frac{\partial f_j}{\partial x_1}\, dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial x_m}\, dx_m.$$

Одатле следи

$$F^*(a(y)\, dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_k}) = a(F(x))\, df_{j_1} \wedge \ldots \wedge df_{j_k}.$$

Задатак 7. (а) Нека је

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(s,t) = (st, 1).$$

Израчунати $F^*(xy^2\, dx + x^2\, dy)$ и $F^*(x\, dx \wedge dy)$.

(б) Нека је

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F(s,t) = s^2 + t^3.$$

Израчунати $F^*(x\, dx)$.

(в) Нека је

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2\theta)$$

и

$$\eta = y^2\, dx + xy\, dy + dz, \quad \zeta = z^3\, dx \wedge dy + xy\, dy \wedge dx + dz \wedge dx, \quad \mu = xz\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

Израчунати $F^*\eta$, $F^*\zeta$ и $F^*\mu$. ✓

Из линеарне алгебре знамо да је свака антисиметрична n–линеарна форма на векторском простору димензије n пропорционална детерминанти. Слиучно, ако је V отворен подскуп у $\mathbb{R}^n$, свака n–форма $\mu \in \Omega^n(V)$ је облика

$$\mu = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad \text{за неку функцију} \quad f \in C^\infty(V).$$

Одатле лако следи да за отворен подскуп $V \subset \mathbb{R}^n$ и пресликавање $F : V \to \mathbb{R}^n$ важи

$$F^* dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \det[F_*] dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

где је $[F_*]$ матрица извода пресликавања F. Имајући ово у виду, теорема о смени промењливе у интегралу може да се напише у облику

$$\int_{F(D)} \mu = \int_D F^*\mu, \tag{20}$$

где је $F : V \to F(V)$ дифеоморфизам, $D \subset V$ ограничен и отворен скуп и $\mu \in \Omega^n(V)$ диференцијална n–форма.

Знамо да линеарно пресликавање $L : X \to X$ чува оријентацију векторског простора X ако је детерминанта његове матрице у некој (а тиме и свакој) бази позитивна. Ако је V отворен подскуп у $\mathbb{R}^n$, кажемо да дифеоморфизам $F : V \to F(V)$ чува оријентацију, ако је његов Јакобијан у свакој тачки позитиван.

Ако је M многострукост димензије n, а φ_1, φ_2 две локалне карте око тачке $p \in M$, важи

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})^* dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \det[(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})_*] dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

где је израз на десној страни Јакобијан пресликавања $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ дефинисаног на отвореном подскупу у $\mathbb{R}^n$. Одатле следи да многострукост M допушта атлас у коме све смене карата чувају оријентацију ако и само ако на њој постоји форма $\mu \in \Omega^{\dim M}(M)$ која нигде није једнака нули. Ово својство издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 10. Многострукост M димензије n је *оријентабилна* ако на њој постоји диференцијална форма $\mu \in \Omega^n(M)$ која је у свакој тачки различита од нуле. $\diamondsuit$

Пошто је $\Omega^n(M)$ модул ранга $\binom{n}{n} = 1$, за сваке две n–форме μ_1 и μ_2 из претходне дефиниције важи $\mu_1 = f\,\mu_2$ за неку функцију $f \in C^\infty(M)$ која није нигде једнака нули. Ако је M повезана, свака така функција је или позитивна или негативна. То дефинише две класе еквиваленције n–форми на оријентабилној многострукости M, свака од њих дефинише једну од две оријентације.

Дефиниција 11. Кажемо да је M *оријентисана* ако је задата једна од две могуће оријентације (еквивалентно: ако је на њој задата n–форма μ која нигде није једнака нули). Кажемо да је база $X_1, \dots, X_n \in T_pM$ *сагласна са оријентацијом* ако је $\mu(X_1, \dots, X_n) > 0$. Овакву форму називамо *формом оријентације* или *формом запремине* на M. $\diamondsuit$

Помоћу интеграла у еуклидском простору, разбијања јединице и формуле смене променљиве (20) може, уз мало труда, да се дефинише интеграл n–форме на *компактној оријентисаној* многострукости димензије n. Слично, може да се дефинише интеграл диференцијалне n–форме *са компактним носачем* на произвољној *оријентисаној* многострукости димензије n. Формула (20) важи и у случају кад је D многострукост. Детаљи могу да се виде нпр. у [**51**].

По дефиницији је $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$. Диференцијал глатке функције $f : M \to \mathbb{R}$ је линеарно пресликавање $df(p) : T_pM \to \mathbb{R}$. Другим речима, $df \in \Omega^1(M)$, па диференцијал функције дефинише линеарно пресликавање

$$d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M).$$

Следећом дефиницијом уводимо *диференцијал k–форми*.

Дефиниција 12. *Диференцијал* је линеарно пресликавање

$$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

које задовољава *уопштено Лајбницово правило*:

$$d(f\eta) = df \wedge \eta + f d\eta.$$

$\diamondsuit$

Претходном дефиницијом је заправо дефинисан низ диференцијала

$$\{0\} \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \Omega^2(M) \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^{\dim M}(M) \longrightarrow \{0\}. \quad (21)$$

Кад желимо да нагласимо домен неког од њих, користимо ознаку

$$d_k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M),$$

али најчешће изостављамо индекс k и уместо d_k пишемо само d.

Задатак 8. (а) Векторском пољу $\mathbf{F} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ у $\mathbb{R}^3$ можемо да придружимо

- 1–форму $\sigma^1 = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$;
- 2–форму $\sigma^2 = P(x,y,z)\,dy \wedge dz + Q(x,y,z)\,dz \wedge dx + R(x,y,z)\,dx \wedge dy$,

а функцији $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ форму $\sigma^3 = f(x,y,z)\,dx \wedge dy \wedge dz$. Доказати да су овиме дефинисани изоморфизми

$$\Omega^1(M) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3), \quad \Omega^2(M) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3), \quad \Omega^1(M) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}) = \Omega^0(\mathbb{R}^3).$$

(б) Набла оператор $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ дејствује

- као градијент

$$\nabla : C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3), \quad f \mapsto \nabla f;$$

- као ротор

$$\nabla : C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3), \quad F \mapsto \nabla \times F;$$

- као дивергенција

$$\nabla : C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}), \quad F \mapsto \nabla \cdot F.$$

Доказати да дијаграм

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega^0(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(\mathbb{R}^3) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\nabla} & C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\nabla} & C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\nabla} & C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}),
\end{array}$$

где су вертикалне стрелице изоморфизми из (а), комутира. ✓

Из чињеницу да други парцијални изводи глатких функција комутирају и релације (16), диференцирајући (18) два пута решавамо следећи задатак.

Задатак 9. Доказати да је $d_k \circ d_{k-1} = 0$. Овај идентитет записујемо и као $d^2 = 0$ и називамо *основним идентитетом хомолошке алгебре.* ✓

Из теореме о изводу сложене функције следи тврђење које формулишемо као задатак:

Задатак 10. Доказати да је $d \circ F^* = F^* \circ d$. Прецизније доказати да за глатко пресликавање $F : M \to N$ и форму $\eta \in \Omega^k(N)$ важи $dF^*\eta = F^*d\eta$. ✓

Напомена 2. Сада можемо да видимо да аналогија Теореме 11 (о исправљивости векторских поља) *не важи* за ковекторска поља, тј. за 1–форме. Када би форма η са својством $\eta_p \neq 0$ била исправљива, тј. када би постојала локална карта φ таква да је $\eta = \varphi^* dx_1$, из претходна два задатка следило би

$$d\eta = 0, \tag{22}$$

што не важи за сваку 1–форму различиту од нуле. ◇

Напомена 3. **(де Рамова кохомологија)** Пошто диференцирање функције зависи само од локалног понашања функције, из (18) следи да и диференцијал форме зависи само од локалног понашања форме. На пример, услов $d\eta = 0$ је локално својство форме η. Форме за које је $d\eta = 0$ називају се *затвореним* формама. Међутим, постојање форме σ за коју је $\eta = d\sigma$ је глобално својство. Форме овог облика називају се *тачним* формама.

Из Задатка 9 следи да је свака тачна форма затворена. Обрнуто не важи. Нпр. нека је θ поларна координата (дефинисана до на адитивну константу $2k\pi$) у $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Форма $d\theta \in \Omega^1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ је затворена: једнакост $d(d\theta) = 0$ следи из Задатка 9, јер је θ *локално* добро дефинисана функција. Међутим, θ није глобално дефинисана функција. Штавише, уопште не постоји функција $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ чији је диференцијал df форма $d\theta$. Из Њутн–Лајбницове формуле следи да би криволијски интеграл диференцијала такве функције по кривој $\mathbb{S}^1$ био

$$\oint_{\mathbb{S}^1} df = f(e^{it})\Big|_{t=0}^{2\pi} = 0.$$

Пошто је

$$\oint_{\mathbb{S}^1} d\theta = 2\pi \neq 0,$$

форма $d\theta$ није тачна.

Означимо са $Z^k(M)$ скуп свих затворених k–форми, а са $B^k(M)$ скуп тачних k–форми. Пошто је диференцијал линеаран, ови скупови су векторски простори. Из Задатка 9 следи да је $B^k(M)$ потпростор простора $Z^k(M)$. Количнички простор

$$H^k_{dR}(M) := Z^k(M)/B^k(M)$$

назива се *k–том де Рамовом кохомологијом* многострукости M. Слику затворене форме η при природној пројекцији

$$Z^k(M) \to H^k_{dR}(M) = Z^k(M)/B^k(M)$$

називамо њеном *кохомолошком класом* и некад означавамо са $[\eta]$, а некад, кад нема опасности од забуне, исто као и форму, само са η.

Де Рамове кохомолошке групе некад означавамо и само са $H^k(M)$, испуштајући индекс dR.

Из Задатка 10 следи да пресликавање $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ (индуковано пресликавањем $F : M \to N$) дефинише пресликавање, које означавамо истим симболом,

$$F^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M).$$

Ако је F дифеоморфизам, из (19) следи да је F^* изоморфизам (са инверзом $(F^*)^{-1} = (F^{-1})^*$). Дакле, де Рамове кохомологије дифеоморфних многострукости су изоморфне. Важи и више од тога: де Рамова кохомологија је хомотопска инваријанта – ако су многострукости M и N хомотопски еквивалентне, њихове де Рамове кохомологије су изоморфне.

Ако је многострукост M повезана, њена нулта де Рамова кохомологија је $H^0(M) = \mathbb{R}$. Заиста, затворене нула форме су локално константне (а на повезаној многострукости константне) функције, па је $Z^0(M) = \mathbb{R}$ а из (21) тривијално следи $B^0(M) = 0$.

У општем случају, нулта де Рамова кохомологија је векторски простор чија је димензија једнака броју компоненти повезаности M. Више де Рамове кохомологије откривају нам финије хомотопске инваријанте.

На пример, пошто смо видели да је $d\theta \in Z^1(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ и $d\theta \notin B^1(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, следи да $d\theta$ дефинише нетривијалан елемент прве де Рамове кохомологије равни без тачке, па је $H^1_{dR}(\mathbb{C}\setminus\{0\}) \neq 0$. Лако може да се види да је $H^1_{dR}(\mathbb{C}\setminus\{0\}) = \mathbb{R}$: довољно је показати да је свака затворена форма $\eta \in \Omega^1(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ пропорционална форми $d\theta$ до на елемент из $B^1(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, тј. до на диференцијал функције. Да бисмо то показали, приметимо да је за затворену форму $\eta \in \Omega^1(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ криволинијским интегралом

$$f(z) := \int_1^z c^{-1}\eta - d\theta, \quad \text{где је} \quad c = (2\pi)^{-1}\oint_{\mathbb{S}^1}\eta$$

добро (тј. независно од пута који спаја тачке 1 и z) дефинисана функција. Ово лако следи из Гринове формуле. Из Њутн–Лајбницове формуле следи да је диференцијал функције f једнак подинтегралној 1–форми, па је

$$\eta = cd\theta + d(cf), \quad \text{односно} \quad [\eta] = c[d\theta],$$

где је са $[\cdot]$ означена кохомолошка класа форме.

Анализирајући овај доказ, лако видимо да је разлог нетривијалности прве де Рамове кохомологије многострукости $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ то што је из равни избачена тачка и да је $H^1(\mathbb{C}) = \{0\}$. Штавише, важи $H^1(M) = \{0\}$ за сваку просто повезану многострукост M.

На крају, пошто је многострукост $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ хомотопски еквивалентна многострукости $\mathbb{S}^1$, а већ је $\Omega^2(\mathbb{S}^1) = \{0\}$ због димензије, следи да је $H^k(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = H^k(\mathbb{S}^1) = \{0\}$ за $k > 1$. Тиме смо показали да је

$$H^k(\mathbb{S}^1) = H^k(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{за } k \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{за } k > 1. \end{cases} \tag{23}$$

Де Рамова кохомологија се лепо слаже са унијом. Наиме, ако је $M = U \cup V$ за отворене подскупове $U, V \subset M$, постоји тачан низ

$$\cdots \to H^{k-1}(U \cap V) \to H^k(M) \to H^k(U) \oplus H^k(V) \to H^k(U \cap V) \to H^{k+1}(M) \to \cdots$$

(доказ може да се види у [**18**]). Овај низ се назива *Мајер–Вијеторисовим низом.* $\diamond$

Задатак 11. Користећи Мајер–Вијеторисов низ, (23) и индукцију по n израчунати де Рамове кохомологије сфере $\mathbb{S}^n$. ✓

Задатак 12. Доказати да спољашње множење

$$\wedge : \Omega^j(M) \times \Omega^k(M) \to \Omega^{j+k}(M)$$

индукује пресликавање

$$\wedge : H^j_{dR}(M) \times H^k_{dR}(M) \to H^{j+k}_{dR}(M)$$

на де Рамовим кохомологијама и да је

$$(H^*_{dR}, +, \cdot, \wedge), \quad \text{где је} \quad H^*_{dR}(M) = \bigoplus_{k=0}^{\dim M} H^k_{dR}(M)$$

асоцијативна алгебра над пољем $\mathbb{R}$. ✓

Задатак 13. Нека је $\theta = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \in \Omega^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Доказати да је

$$d\theta = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

и извести одатле запис Гринове формуле

$$\int_{\partial D} \theta = \iint_D d\theta$$

на језику диференцијалних форми. ✓

Уопштење претходног задатка је Стоксова теорема. Ако је M оријентисана многострукост димензије n, на њој је дефинисан интеграл n–форми. Ако је уз то M многострукост са границом ∂M, онда је и ∂M оријентисана тако да важи следећа теорема.

Теорема 12. (Стоксова) *Ако је M компактна оријентисана многострукост димензије n са границом ∂M и $\eta \in \Omega^{n-1}(M)$, онда је*

$$\int_{\partial M} \eta = \int_M d\eta.$$

Последица 6. *Ако је M компактна оријентабилна многострукост димензије n без границе, онда је $H^n_{\mathrm{dR}}(M) \neq 0$.*

$\triangle$ Пошто је M оријентабилна, постоји форма $\mu \in \Omega^n(M)$ која је строго позитивна на свакој бази тангентног простора сагласној са оријентацијом, одакле следи

$$\int_M \mu > 0.$$

Због димензије је $d\mu = 0$, па ова форма дефинише де Рамову кохомолошку класу. Та класа је нетривијална, јер када би било $\mu = d\eta$, из Стоксове теореме би следило

$$\int_M \mu = \int_{\partial M = \emptyset} \eta = 0,$$

што је контрадикција. $\bigtriangledown$

Напомена 4. Видећемо (у Примеру36 на стр. 46) да важи прецизније тврђење: ако је M као у Последици 6, онда је $H^n_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathrm{R}$. $\diamond$

Пример 8. Из Последице 4 на стр. 9 следи да не постоји глатка ретракција $h : \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$. Ово тврђење може да се изведе и помоћу де Рамове кохомологије на следећи начин. Пошто је лопта контрактибилна, њена де Рамова кохомологија је тривијална, а из Последице 6 видимо да је де Рамова кохомологија сфере нетривијална. Претпоставимо да постоји ретракција h. Нека је

$$j : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{B}^n, \quad j(x) = x.$$

Тада је $h \circ j = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$, па је

$$j^* \circ h^* = (h \circ j)^* = \mathrm{id} : H^{n-1}_{dR}(\mathbb{S}^{n-1}) \to H^{n-1}_{dR}(\mathbb{S}^{n-1})$$

идентичко пресликавање $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Међутим, то је контрадикција, јер се композиција $j^* \circ h^*$ факторише кроз

$$H^{n-1}_{dR}(\mathbb{S}^{n-1}) \to H^{n-1}_{dR}(\mathbb{B}^n) = \{0\} \to H^{n-1}_{dR}(\mathbb{S}^{n-1}),$$

па не може да буде идентичко пресликавање. $\sharp$

1.2. Фробенијусова теорема и последице. Посматрајмо сада систем парцијалних једначина

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a(x,y,z), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = b(x,y,z), \qquad z(x_0,y_0) = z_0, \tag{24}$$

где су a и b глатке функције. Јасно је да не можемо да очекујемо да овај систем увек има решења, чак ни локално.

Пример 9. Нека је $a(x,y,z) = y$, $b(x,y,z) = -x$. Тада би решење система (24) задовољавало

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1,$$

што је немогуће јер, пошто се ради о глатким функцијама, други парцијални изводи комутирају. $\sharp$

Геометријски гледано, решење $z = z(x, y)$ система (24) је једначина површи $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ која садржи тачку (x_0, y_0, z_0), такве да је векторско поље

$$N = \operatorname{grad}(z(x,y) - z) = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}$$

нормално на Σ. Другим речима,

$$A = \frac{\partial}{\partial x} + a(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}, \qquad B = \frac{\partial}{\partial y} + b(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z} \tag{25}$$

је база тангентног простора $T_{(x,y,z)}\Sigma$ у свакој тачки $(x, y, z) \in \Sigma$. Ако израчунамо комутатор ова два векторска поља, добијамо

$$[A, B] = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right)\frac{\partial}{\partial z},$$

па је $[A, B] = 0$ неопходан услов за постојање решења једначине (24).

Да бисмо ова разматрања ослободили координата, уведимо следећу дефиницију.

Дефиниција 13. *Дистрибуција* Δ димензије k на многострукости M је фамилија k–димензионих потпростора

$$\Delta_p \subset T_pM,$$

која је *глатка по* p, у смислу да свака тачка многострукости M има околину U, у којој је Δ линеарни омотач k глатких векторских поља; другим речима, постоје глатка векторска поља

$$X^1, \dots, X^k : U \to TM,$$

таква да је $X^1_p, \dots, X^k_p$ база простора Δ_p за свако $p \in U$.

Дистрибуција $\Delta \subset TM$ је *инволутивна* ако важи импликација

$$X, Y \in \Delta \;\Rightarrow\; [X, Y] \in \Delta$$

Дистрибуција Δ је *интеграбилна* ако за сваку тачку $p \in M$ постоји локална карта (U, φ), таква да је

$$\varphi_*^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \varphi_*^{-1}\frac{\partial}{\partial x_k}$$

база диструбуције Δ на U. $\lozenge$

Услов интеграбилности значи да је дистрибуција Δ тангентно раслојење подмногострукости у U, задате у локалним координатама са

$$\varphi_{k+1}(x) = c_{k+1}, \; \dots, \; \varphi_n(x) = c_n. \tag{26}$$

Специјално, за $k = 1$ интеграбилност означава локалну исправљивост векторских поља. Питање (локалне) решивости система (24) сада можемо да формулишемо као питање интеграбилности задате дистрибуције. Приметимо да дистрибуцију задату векторима (25) можемо да представимо као језгро 1–форме

$$\theta = dz - a(x,y,z)\,dx - b(x,y,z)\,dy$$

и да решавање једначине (24) преформулишемо као тражење површи Σ, такве да је $\theta\big|_{T\Sigma} = 0$ (томе одговара метод решавања парцијалних једначина помоћу тоталних диференцијала). У општем случају, дистрибуција димензије k на многострукости M димензије n се задаје као језгро $n-k$ 1–форми $\theta_1, \ldots, \theta_{n-k}$, а питање њене интеграбилности је еквивалентно питању постојања подмногострукости $\jmath : S \hookrightarrow M$, такве да је $\jmath^*\theta_i = 0$ за све $i \in \{1, \ldots, n-k\}$.

Нека је I_Δ идеал диференцијалних форми које су једнаке нули на Δ; прецизније, нека је

$$\Delta^\perp := \{\alpha \in \Omega^1(M) \mid \alpha(\Delta) = \{0\}\} \quad \text{и} \quad I_\Delta := \{\beta \wedge \alpha \mid \beta \in \Omega^*(M), \alpha \in \Delta^\perp\}.$$

Интеграбилност дистрибуције Δ, односно постојање координата (26), еквивалентно је постојању локалних координата $(t_1, \ldots, t_n)$ у којима је идеал I_Δ генерисан формама $dt_{k+1}, \ldots, dt_n$.

Теорема 13. (Фробенијусова) *За дистрибуцију $\Delta \subset TM$ следећи услови су еквивалентни:*

(1) Δ *је интеграбилна;*
(2) Δ *је инволутивна;*
(3) $dI_\Delta \subset I_\Delta$.

$\triangle$ Дајемо скицу доказа ове теореме. Еквиваленција интеграбилности и инволутивности следи индукцијом по димензији k дистрибуције Δ. За $k = 1$ услов инволутивности је испуњен – ако су X, Y два векторска поља једнодимензионе дистрибуције Δ, онда је $Y = fX$ за неку глатку функцију f, па је

$$[X, fX] = X(f)X \in \Delta.$$

Услов интеграбилности једнодимензионе дистрибуције је испуњен на основу Теореме 10. Претпоставимо да тврђење важи за дистрибуције димензије $k-1$ и нека је Δ инволутивна дистрибуција димензије k, задата векторским пољима $X_1, \ldots, X_k$. Пошто је тврђење локалног карактера, можемо да радимо као да је $M = \mathbb{R}^n$. Из Теореме 11 о исправљивости векторских поља следи да постоје локалне координате $(x_1, \ldots, x_n)$ у којима је $X_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$. Посматрајмо векторска поља

$$Y_j := X_j - X_j(x_k)X_k \quad \text{за} \quad 1 \le j < k \quad \text{и} \quad Y_k = X_k.$$

Векторска поља $Y_1, \ldots, Y_{k-1}$ дефинишу инволутивну дистрибуцију. Заиста, нека је $i < k$, $j < k$. Из инволутивности дистрибуције Δ следи да је

$$[Y_i, Y_j] = f(x)Y_k + \sum_{m=1}^{k-1} c_m Y_m. \tag{27}$$

Пошто је $Y_j(x_k) = 0$ за $j < k$ и $Y_k(x_k) = 1$, применом обе стране једнакости (27) на координатну функцију $x \mapsto x_k$ добијамо $f = 0$, што значи да $\{Y_1, \ldots, Y_{k-1}\}$ дефинише инволутивну дистрибуцију. По индуктивној хипотези, она је интеграбилна, па постоји координатни систем $(y_1, \ldots, y_n)$ у коме је дистрибуција Δ дата векторским пољима

$$\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_{k-1}}, \frac{\partial}{\partial x_k},$$

где је $\frac{\partial}{\partial x_k}$ векторско поље, претходно означавано са X_k и Y_k, које у новим координатама има запис

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{m=1}^{m} a_m \frac{\partial}{\partial y_m}. \tag{28}$$

Слично као и малочас, израчунавањем вредности израза

$$\left[\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right] = f(x)\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{k-1} c_i \frac{\partial}{\partial y_i} \tag{29}$$

на координатној функцији $x \mapsto x_k$ добијамо $f \equiv 0$. Из (28) и (29) (са $f = 0$), добијамо

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial a_m}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_m} = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

одакле следи да је $\frac{\partial a_m}{\partial y_j} = 0$ за $m \geq k$, тј. да функције $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m$ зависе само од $(y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n)$. Кориговањем последњег члана, добијамо нови систем векторских поља

$$\frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial y_{k-1}}, \quad Z_k = \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{m=1}^{k-1} c_m \frac{\partial}{\partial y_m},$$

који такође генерише дистрибуцију Δ, при чему векторско поље Z_k не зависи од $(y_1, \ldots, y_{k-1})$, па можемо на њега да применимо Теорему о исправљивости векторских поља у $\mathbb{R}^{n-k}$ и пресликамо га у координатни вектор (тј. константно векторско поље).

Еквиваленција између инволутивности, тј. затворености дистрибуције у односу на Лијеве заграде, и затворености одговарајућег идеала у односу на спољашњи извод је последица следећег тврђења, које издвајамо као посебну лему. $\bigtriangledown$

Лема 1. *Нека су* $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ *векторска поља и* $\theta \in \Omega^1(M)$ *диференцијална 1–форма. Тада је*

$$d\theta(X, Y) = X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta([X, Y]).$$

$\bigtriangleup$ Пошто је тврђење локалног карактера, и линеарно по θ, довољно је да га докажемо за форму $\theta = f\,dg$, где су f и g глатке функције. Тада је $d\theta = df \wedge dg$, па је

$$d\theta(X, Y) = df(X)dg(Y) - dg(X)df(Y) = X(f)Y(g) - X(g)Y(f).$$

Са друге стране,

$$X\theta(Y) = X(fdg(Y)) = X(fY(g)) = X(f)Y(g) + fX(Yg).$$

Слично, $Y\theta(X) = X(g)Y(f) + fY(Xg)$. На крају,

$$\theta([X, Y]) = fdg([X, Y]) = f[X, Y](g) = f(X(Yg) - Y(Xg)),$$

одакле следи доказ леме. $\bigtriangledown$

Лема 1 има следеће уопштење.

Лема 2. *Нека је* $\eta \in \Omega^k(M)$ k*–форма на многострукости* M*. Тада је*

$$\begin{aligned} d\eta(X_1, \ldots, X_{k+1}) = {}& \textstyle\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i \eta(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{k+1}) + \\ & + \textstyle\sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \eta([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{k+1}), \end{aligned}$$

где симбол $\widehat{\cdot}$ *(„узималица”) означава да је тај члан изостављен.*

Напомена 5. Фробенијусова теорема може да се схвати као геометризација метода *Пфафових система* или *Пфафових једначина* из теорије диференцијалних једначина. Идеја овог метода се састоји у следећем. Нека је дата парцијална једначина, нпр.

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{30}$$

Ако уведемо смене

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

решавање једначине (30) се своди на решавање система

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad dp - r\,dx - s\,dy = 0, \quad dq - s\,dx - t\,dy = 0 \tag{31}$$

на подмногострукости[7] $\Sigma \subset \mathbb{R}^8$ која је дефинисана једначином

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \tag{32}$$

Многострукост (32) је хиперповрш у $\mathbb{R}^8$, па је њена димензија 7. Систем (31), који се назива *Пфафовим системом*, дефинише дистрибуцију кодимензије 3 на Σ, дакле димензије 4. Уколико је ова дистрибуција интеграбилна, она дефинише подмногострукост димензије 4. Задавањем различитих граничних услова (типа $z(x, 0) = f(x)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(x, 0) = g(x)$ и сл), даље смањујемо димензију, тј. издвајамо површи $z = z(x, y)$ које су решења система (30) са датим граничним условима.

Наравно, овај метод се уопштава и на случај када је уместо једне једначине (30) задат систем од k парцијалних једначина; тада је Σ, уместо хиперповрши задате једном једначином (32), подмногострукост кодимензије k. Напоменимо још и да се овде ради о *локалним* решењима, јер је Фробенијусова теорема локалног карактера.

Са оваквим питањима сусрели смо се већ на првим курсевима Анализе. Питање потенцијалности векторског поља

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

на отвореном посдкупу U у $\mathbb{R}^3$, тј. питање егзистенције функције $V : U \to \mathbb{R}$ такве да је $\mathbf{F} = \operatorname{grad} V$, је, бар локално, питање егзистенције решења парцијалних једначина

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = Q, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = R. \tag{33}$$

Оно се може посматрати и дуално, као питање егзистенције функције V такве да је

$$dV = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

што је Пфафова једначина система (33). Као и у Фробенијусовој теореми, неопходан услов интеграбилности можемо да напишемо у два еквивалентна облика, на језику векторских поља и на језику диференцијалних форми:

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \iff d\sigma = 0,$$

где је $\sigma = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ (видети Задатак 8). Као и у Фробенијусовој теореми, овај неопходан услов интеграбилности је *локално* и довољан.

---

[7] Ако претпоставимо да је 0 регуларна вредност пресликавања F, из Теореме 2 следи да је $F^{-1}(0)$ многострукост.

Слично, векторско поље $\mathbf{B}$ у $U \subset \mathbb{R}^3$ је *соленоидно* ако постоји векторско поље $\mathbf{A}$ (тзв. *векторски потенцијал* поља $\mathbb{A}$) такво да је

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Пошто је $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$, следи да је услов $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ *неопходан* за соленоидност. И овај услов може (као и у Задатку 8) да се напише на језику диференцијалних форми: ако је

$$\mathbf{B} = b_1(x,y,z)\mathbf{i} + b_2(x,y,z)\mathbf{j} + b_3(x,y,z)\mathbf{k},$$

посматрајмо 2–форму

$$\beta := b_3\, dx \wedge dy + b_1\, dy \wedge dz + b_2\, dz \wedge dx.$$

Лако је видети да је

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \iff d\beta = 0.$$

Ово је неопходан услов соленоидности. Опет, овај услов је *локално* довољан.

Глобално, за интеграбилност постоје опструкције, које су тополошке или геометријске природе. На пример де Рамова кохомологија

$$H^k_{dR}(M) = \ker d_k / \operatorname{im} d_{k-1}, \quad \text{где је} \quad d_j : \Omega^j(M) \to \Omega^{j+1}(M) \quad \text{диференцијал},$$

је хомотопска инваријанта многострукости M. Тако је неопходан услов потенцијалности уједно и довољан у области U у којој је $H^1_{dR}(U) = 0$, а неопходан услов соленоидности је и довољан у области U у којој је $H^2_{dR}(U) = 0$ (видети Напомену 3). $\diamond$

Задатак 14. Дати пример векторског поља које је локално, али не и глобално, соленоидно. ✓

Специјалан случај Фробенијусове теореме односи се на случај кад је дистрибуција задата једном формом $\alpha \in \Omega^1(M)$. Тада је $\Delta = \ker\alpha$, а идеал I_Δ је генерисан формама α и $d\alpha$. Пошто је α 1–форма, њен квадрат је $\alpha\wedge\alpha = 0$, па је идеал I_Δ линеарни омотач форми облика

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge k} := \alpha \wedge \underbrace{d\alpha \wedge \ldots \wedge d\alpha}_{k}.$$

Нека је $r := \max\{k \mid (d\alpha)^{\wedge k} \neq 0\}$; другим речима r је број дефинисан са

$$(d\alpha)^{\wedge r} \neq 0 \qquad (d\alpha)^{\wedge r+1} = 0.$$

Број r назива се *рангом 2–форме* $d\alpha$.

Теорема 14. **(Пфаф и Дарбу)** *Нека је* $\dim M = m$ *и нека је* $\alpha \in \Omega^1(M)$ *диференцијална 1–форма, таква да форма* $d\alpha \in \Omega^2(M)$ *има константан ранг* r *на неком отвореном подскупу* $V \subset M$.

(а) *Ако је* $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge r} = 0$ *свуда на* V, *онда постоји координатна карта* $U \subset V$ *са координатама* $(x_1, \ldots, x_{m-r}, y_1, \ldots, y_r)$ *у којима је*

$$\alpha = x_1\, dy_1 + \ldots + x_r\, dy_r.$$

(б) *Ако је* $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge r} \neq 0$ *свуда на* V, *онда постоји координатна карта* $U \subset V$ *са координатама* $(x_1, \ldots, x_{m-r}, y_1, \ldots, y_r)$ *у којима је*

$$\alpha = x_1\, dy_1 + \ldots + x_r\, dy_r + dx_{r+1}.$$

Напомена 6. Издвајамо посебно два следећа случаја максималног ранга. Ако је M многострукост непарне димензије $m = 2n+1$, форма $\alpha \in \Omega^1(M)$ се назива *контактном формом* ако је

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} \neq 0.$$

Из Теореме 14 следи да свака контактна форма има локални запис

$$\alpha = dz + x_1\, dy_1 + \ldots + x_n\, dy_n.$$

Ако је M многострукост парне димензије $m = 2n$, *симплектичка форма* на M је 2–форма $\omega \in \Omega^2(M)$ која је затворена ($d\omega = 0$) и

$$\omega^{\wedge n} \neq 0.$$

Пошто је свака затворена форма локално тачна[8], за сваку карту U постоји 1–форма $\alpha \in \Omega^1(U)$, таква да је $\omega\big|_U = d\alpha$). Пошто је

$$(d\alpha)^{\wedge n} = \omega^{\wedge n} \neq 0 \qquad \text{и} \qquad \alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} = 0$$

(друга једнакост важи због $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} \in \Omega^{2n+1}(M) = \{0\}$) из Теореме 14 следи да α има локални запис $\alpha = x_1\, dy_1 + \ldots + x_n\, dy_n$, односно да свака симплектичка форма има локални запис

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \ldots + dx_n \wedge dy_n.$$

Изучавање ових форми ћемо да наставимо у Глави 2, где ћемо и да докажемо специјални случај Теореме 14 за њих. Доказ Теореме 14 у наведеном, општијем, облику може да се види у [**19**]. $\diamond$

Задатак 15. У Напомени 2 на стр. 18 смо видели да је (22) неопходан услов исправљивости ковекторских поља. Да ли је он и довољан? ✓

1.3. Лијеве групе. Искористићемо сада Фробенијусову теорему да докажемо тврђење које нам омогућава да конструишемо нове многострукости од већ познатих. Пре тога, дајемо неколико дефиниција.

Дефиниција 14. *Лијева група* је група G која има структуру глатке многострукости, такву да су пресликавања

$$G \times G \to G,\ (g,h) \mapsto gh \quad \text{и} \quad G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$$

глатка. $\Diamond$

Пример 10. $(\mathbb{R}, +)$ је Лијева група. Општије, сваки векторски простор коначне димензије је Лијева група. Групе $GL(n, \mathbb{K})$ инвертибилних $n \times n$ матрица над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ су Лијеве групе, као и њихове затворене подгрупе. Коначне групе су Лијеве групе димензије 0. $\sharp$

Дефиниција 15. *Лево дејство* групе G на скупу M је пресликавање

$$G \times M \to M, (g, x) \mapsto L_g(x), \tag{34}$$

такво да је

$$L_e(x) = x \qquad \text{и} \qquad L_{gh}(x) = L_g(L_h(x)),$$

где је e неутрал групе G. Слично се дефинише и десно дејство R_g, с тим што се други услов замењује са

$$R_{gh}(x) = R_h(R_g(x)).$$

[8]Поенкареова лема: $H^k_{dR}(\mathbb{R}^m) = 0$ за $k \geq 1$.

$\diamondsuit$

Лево дејство уопштава леву транслацију (тј. множење са леве стране) $x \mapsto gx$ у групи, а десно десну. Зато често резултат левог дејства означавамо са gx уместо $L_g(x)$, а десног са xg уместо $R_g(x)$, и када се ради о дејству групе на произвољном скупу, а не само на самој групи. Увешћемо још неколико појмова, користећи ознаку за лево дејство; аналогни појмови се на исти начин уводе и за десно дејство.

Пример 11. Група $GL(n, \mathbb{K})$ инвертибилних $n \times n$ матрица над пољем $\mathbb{K}$ дејствује лево на простору $\mathbb{K}^n$. Сам простор $\mathbb{K}^n$ (прецизније, његова комутативна група $(\mathbb{K}^n, +)$) дејствује на себи транслацијама $(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{x}$. $\sharp$

Пример 12. Из (14) видимо да глатко векторско поље на многострукости дефинише дејство групе $(\mathbb{R}, +)$ на многострукости. $\sharp$

Дефиниција 16. Ако је $x \in M$ тачка скупа на коме дејствује група G, скуп

$$G \cdot x := \{gx \mid g \in G\} \subset M$$

назива се *орбитом* тачке x. *Простор орбита* је количнички скуп M/G релације еквиваленције $x \sim y \Leftrightarrow y \in G_x$. Скуп

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\} \subset G$$

назива се *стабилизатором* тачке x. $\diamondsuit$

Пример 13. Нека је G група и H њена подгрупа. Група H лево дејствује на G левим транслацијама

$$H \times G \to G, \qquad (h, g) \mapsto hg.$$

Простор орбита је количнички простор G/H. Из курса Алгебре нам је познато да овај скуп има структуру групе ако је H *нормална* подгрупа; у општем случају G/H је само скуп. Као и за сваку релацију еквиваленције, постоји канонска пројекција

$$\pi : G \to G/H, \qquad \pi(g) := \{gH\}.$$

Свако пресликавање

$$s : G/H \to G$$

које задовољава $\pi \circ s = \mathrm{id}_{G/H}$ назива се *сечењем* пројекције π.

Када је M глатка многострукост, а G Лијева група, можемо да говоримо о *глатком дејству*, подразумевајући под тиме глаткост пресликавања (34). Онда је природно поставити питање да ли се у Примеру 13 на G/H преноси глатка структура, чак и ако се не преноси алгебарска. Одговор даје следећа лема.

Теорема 15. *Нека је G Лијева група и $H \subset G$ њена затворена Лијева подгрупа. Тада на простору G/H постоји природна глатка структура, у којој је скуп G/H многострукост димензије* $\dim G - \dim, H$*, таква да је канонска пројекција*

$$\pi : G \mapsto G/H$$

глатко пресликавање.

$\triangle$ Из курса Топологије нам је познато да је на G/H задата тополошка структура, захтевом да је пројекција π отворено и непрекидно пресликавање, и да је та топологија Хаусдорфова ако је подгрупа H затворена.

За свако $g \in G$ лева транслација

$$L_g : G \to G, L_g(x) = gx$$

је дифеоморфизам ($L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$), па је њен извод у јединици $e \in G$

$$(L_g)_*(e) : T_eG \to T_gG$$

изоморфизам векторских простора. Одатле следи да је са

$$\Delta_g := (L_g)_*(T_eH)$$

добро дефинисана глатка дистрибуција димензије $\dim H$. Из Теореме 8 следи да је ова дистрибуција инволутивна, па из Фробенијусове теореме следи да је и интеграбилна. Лако се види да су њене интегралне многострукости косет простори gH, па постоји карта око тачке g у којој је $gH \cong \{0\}\times\mathbb{R}^{\dim H} \subset \mathbb{R}^{\dim G}$; другим речима, да постоји локална карта облика $(U\times V, \varphi)$ где је $V \subset H$ отворен скуп у H, $U\times V$ отворен скуп у G и $\varphi(g) = 0$. Из Теореме о инверзној функцији, примењене на пресликавање

$$G \times H \to G \times H, \qquad (x, y) \mapsto (xy, y),$$

следи да та локална карта може да се изабере тако да је да је $UV := \{uv \mid u \in U, v \in V\}$ отворен подскуп у G. Пошто је π отворено пресликавање, скуп $\pi(UV)$ је отворена околина тачке $\pi(p)$, хомеоморфна скупу U. Глатка структура је дефинисана картом $(U \times \{0\}, \varphi\big|_{U\times\{0\}})$. $\bigtriangledown$

Напомена 7. У претходној теореми претпоставили смо да је H *затворена Лијева подгрупа.* Заправо, довољно је претпоставити да је H *затворена подгрупа*, јер је свака затворена подгрупа H Лијеве групе G подмногострукост у G и самим тим Лијева група (видети нпр. [**5**]). $\diamond$

Теорема 16. *Нека је $F : G_1 \to G_2$ хомоморфизам Лијевих група, тј. глатко пресликавање које је алгебарски хомоморфизам група. Тада је његов ранг константан, па је $\ker F$ глатка подмногострукост у G_1 (дакле и Лијева подгрупа) димензије $\dim \ker F = \dim G_1 - \operatorname{rang} F$.*

$\triangle$ Пошто је F хомоморфизам, важи $F(x) = F(g^{-1}gx) = F(g^{-1})F(gx)$, тј.

$$F = L_{F(g^{-1})} \circ F \circ L_g. \tag{35}$$

Транслација је дифеоморфизам, па је њен извод бијекција, тако да диференцирањем (35) закључујемо да је $\operatorname{rang} DF(x) = \operatorname{rang} DF(gx)$ за све $g \in G$. Остатак следи из Теореме 2. $\bigtriangledown$

Дефиниција 17. Дејство групе G на скупу M је *транзитивно*, ако

$$(\forall x, y \in M)\, (\exists g \in G)\, gx = y.$$

Другим речима, дејство је транзитивно ако је $Gx = M$ за свако $x \in M$. $\Diamond$

Пример 14. Дејство транслацијама на $\mathbb{K}^n$ које смо видели у Примеру 11 је транзитивно. Општије, свако дејство групе на самој себи је транзитивно: свако $g \in G$ је у орбити $Ge = G$, тако да постоји само једна орбита дејства.

Коњугација

$$G \times G \to G, \qquad (g, x) \mapsto gxg^{-1}$$

дефинише лево дејство групе G на самој себи. Ово дејство није транзитивно, јер је $Ge = \{e\}$. Ако је $\mathrm{Syl}_p(G)$ скуп свих Силовљевих p–подгрупа[9] групе G, дејство конјугација на $\mathrm{Syl}_p(G)$ је транзитивно (Друга Силовљева теорема).

Дејство групе $GL(n,\mathbb{K})$ у Примеру 11 није транзитивно, јер је орбита нуле $GL(n,\mathbb{K})\,0 = \{0\}$. Дејство групе $GL(n,\mathbb{K})$ је транзитивно на $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Дејство групе

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^T = A^TA = E\}$$

ортогоналних матрица није транзитивно на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, јер је орбита сваке тачке сфера кроз њу, са центром у нули. Дејство групе $O(n)$ је транзитивно на свакој од тих сфера. $\sharp$

Елемент $g \in G$ у Дефиницији 17 је јединствен до на стабилизатор G_x тачке x: ако је $g_1x = y$ и $g_2x = y$, онда је $g_2^{-1}g_1x = g_2^{-1}y = g_2^{-1}g_2x = x$, тј. $g_1 \in g_2G_x$. Одатле следи да је, за произвољно фиксирано $x \in M$, са

$$M \to G/G_x, \qquad y \mapsto gG_x,$$

где је $g \in G$ било који елемент групе такав да је $y = gx$, добро дефинисана бијекција. Уколико је G Лијева група, а G_x њена затворена Лијева подгрупа, Теорема 15 нам омогућава да скуп M снабдемо структуром многострукости.

Пример 15. У Примеру 4 смо видели један начин да снабдемо сферу структуром глатке многострукости. Други начин је следећи. У Примеру 14 смо видели да група $O(n+1)$ ортогоналних матрица дејствује транзитивно на $\mathbb{S}^n$; стабилизатор тачке $x = (1,0,\dots,0)$ је

$$O(n+1)_x \cong O(n).$$

Формално, $O(n)$ није подгрупа групе $O(n+1)$; прецизније би било рећи да је стабилизатор $O(n+1)_x$ изоморфан њеној подгрупи која се састоји од матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \qquad S \in O(n),$$

што је затворена подгрупа изоморфна групи $O(n)$. Из Теореме 15 следи да сфера $\mathbb{S}^n = O(n+1)/O(n)$ има глатку структуру. $\sharp$

Пример 16. Нека је $\mathbb{R}P^n$ скуп свих правих у $\mathbb{R}^{n+1}$ које пролазе кроз координатни почетак. Група ортогоналних матрица $O(n+1)$ транзитивно дејствује на $\mathbb{R}P^n$ – за произвољне праве l_1 и l_2 постоји ортогонална матрица A таква да је $A(l_1) = l_2$. Стабилизатор праве $l = \{(t,0,\dots,0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ је

$$O(n+1)_l \cong O(n) \times O(1),$$

па је

$$\mathbb{R}P^n \cong O(n+1)/(O(n) \times O(1))$$

глатка многострукост. $\sharp$

Задатак 16. Доказати да у Примеру 15 уместо дејства ортогоналне групе може да се посматра дејство специјалне ортогоналне групе

$$SO(n+1) = \{A \in O(n) \mid (\det)\, A = 1\}$$

и закључити да је $\mathbb{S}^n \equiv SO(n+1)/SO(n)$. Да ли исто може да се уради у Примеру 16? Упутство: интерпретирати $\mathbb{R}P^n = SO(n+1)/O(n)$. ✓

[9] *Силовљева p–подгрупа* групе G је свака њена максимална p–подгрупа; тј. подгрупа чији је сваки елемент реда p^k за неко k, која није садржана ни у једној другој таквој подгрупи.

Теорема 15 нам омогућава да простор орбита G/H дејства Лијеве групе H на G снабдемо глатком структуром. Природно је поставити питање постојања глатке структуре на простору орбита дејства Лијеве групе на произвољној глаткој многострукости (не обавезно Лијевој групи). Да бисмо размотрили ово уопштење, увешћемо још неке појмове.

Дефиниција 18. Дејство групе G на скупу M је *слободно*, или *без фиксних тачака* ако

$$(\exists x \in M)\, gx = x \;\Rightarrow\; g = e.$$

Другим речима, дејство је слободно ако је стабилизатор сваке тачке тривијалан: $(\forall x \in M)\, G_x = \{e\}$. $\Diamond$

Дефиниција 19. Дејство Лијеве групе G на многострукости M се назива *сопственим* ако је пресликавање

$$G \times M \to M \times M, \qquad (g, x) \mapsto (x, gx)$$

сопствено пресликавање[10]. Еквивалентно, дејство је сопствено ако је за произвољне компактне подскупове $A, B \subset M$ скуп $\{g \in G \mid gA \cap B \neq \emptyset\} \subset G$ компактан. $\Diamond$

Пример 17. Ако је G компактна група, свако њено дејство је сопствено. Ако је G некомпактна група, њено дејство на компактном скупу M није сопствено. $\sharp$

Дефиниција 20. Пресликавање $f : N \to M$ се назива *субмерзијом*, ако је његов извод $f_*(p) : T_pN \to T_{f(p)}M$ сурјективан за свако $p \in N$.

Пример 18. Пројекција $\pi : G \to G/H$ у Теореми 15 је субмерзија. $\sharp$

Теорема 17. *Ако Лијева група G дејствује на многострукости M слободно и сопствено, онда простор орбита M/G има јединствену структуру глатке многострукости, такву да је канонска пројекција $\pi : M \to M/G$ субмерзија.*

Напомена 8. Нека је G Лијева група и H њена затворена Лијева подгрупа. Лако се види да је дејство H на G слободно. Може да се докаже да је ово дејство и сопствено – ако су $A, B \subset G$ компактни скупови и h_n низ у $\{h \in H \mid hA \cap B \neq \emptyset\}$, онда постоје низови $a_n \in A$ и $b_n \in B$ такви да је $h_n a_n = b_n$. Преласком на конвергентан подниз $a_{k(n)}$ низа a_n, а затим на конвергентан подниз $b_{j(k(n))}$ низа b_{k_n} добијамо конвергентне низове $a_j = a_{j(k(n))}$ и $b_j = b_{j(k(n))}$ такве да је $h_j = a_j{-}1 b_j$ конвергентан подниз низа h_n.

Тако видимо да је Теорема 15 последица Теореме 17. Доказ последње теореме може да се изведе помоћу идеје сличне оној из доказа Теореме 15, али је технички сложенији. Ми га овде изостављамо. $\diamond$

Пример 19. Антиподално пресликавање $a(x) = -x$ дефинише дејство групе $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{S}^n$. У Примерима 4 и 15 смо видели да је сфера $\mathbb{S}^n$ глатка многострукост, а $\mathbb{Z}_2$ је Лијева група димензије 0. Помоћу Теореме 17 пројективни простор

$$\mathbb{R}P^n \cong \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$$

[10] Пресликавање је *сопствено* ако је инверзна слика компактног скупа компактан скуп.

можемо да снабдемо структуром глатке многострукости. Слично, Лијева група $\mathbb{S}^1$ јединичних комплексних бројева дејствује слободно на сфери $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, количничка многострукост

$$\mathbb{C}P^n \cong \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$$

је комплексни пројективни простор. $\sharp$

Пројекција $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$ у претходном примеру је локални хомеоморфизам (за разлику од пројекције $\mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$). То је манифестација општијег правила, које уводимо следећом дефиницијом и тврђењем.

Дефиниција 21. Дејство групе G на многострукости M је *тотално прекидно* ако свака тачка $x \in M$ има отворену околину $U \ni x$, такву да је $gU \cap U = \emptyset$ за свако $g \in G \setminus \{e\}$. $\diamondsuit$

Тврђење 1. *Ако група G дејствује глатко и тотално прекидно на многострукости M, онда количнички простор M/G има јединствену структуру глатке многострукости у односу на коју је пројекција*

$$\pi : M \to M/G$$

локални дифеоморфизам, а $(M, M/G, \pi)$ је наткривање[11].

$\triangle$ Из услова тоталне прекидности дејства следи да свака тачка $p \in M$ има координатну околину U на којој је пројекција π инјективна. Карта (U, φ) на M дефинише карту $(\pi(U), \varphi \circ \pi^{-1})$ на M/G. $\triangledown$

Задатак 17. Доказати да је

$$\pi_0 :]0, +\infty[\to \mathbb{S}^1, \qquad \pi_0(t) = e^{2\pi i t}$$

локални дифеоморфизам који није наткривајуће пресликавање. $\checkmark$

Задатак 18. Нека су M и N глатке многострукости. Доказати да је сваки сопствени локални дифеоморфизам $\pi : M \to N$ наткривајуће пресликавање. Упутство: доказати да је за свако $x \in N$ скуп $\pi^{-1}(x)$ коначан, $\pi^{-1}(x) = \{t_1, \ldots, t_k\}$. Свака тачка t_j има околину V_j на којој је π дифеоморфизам. Скуп $\pi(V_1) \cap \ldots \cap \pi(V_k) \subset N$ је отворена околина тачке x. Она не може да игра улогу скупа U из дефиниције наткривања, пошто $\pi^{-1}(\pi(V_1) \cap \ldots \cap \pi(V_k))$ није подскуп скупа $V := V_1 \cup \cdots \cup V_k$. Али ако је W отворена околина тачке x, таква да је затворење $\overline{W}$ компактан подскуп скупа $\pi(V_1) \cap \ldots \cap \pi(V_k)$, онда је скуп $U = W \setminus \pi(\pi^{-1}(\overline{W}) \setminus V)$ отворен (због сопствености пресликавања π). Доказати да је U околина тачке x која задовољава дефиницију наткривања. На ком месту ова конструкција не пролази у примеру из Задатка 17? $\checkmark$

---

[11] *Наткривање тополошког простора* X је тројка $(\widehat{X}, X, \pi)$, где је $\widehat{X}$ тополошки простор, а $\pi : \widehat{X} \to X$ непрекидно пресликавање (зовемо га *наткривајућим пресликавањем*, такво да свака тачка $x \in X$ има отворену околину U, такву да је $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ унија дисјунктних отворених скупова $V_\lambda \subset \widehat{X}$, а рестрикција $\pi\big|_{V_\lambda} : V_\lambda \to U$ хомеоморфизам. Нпр. $(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1, \pi(t) = e^{2\pi i t})$ је наткривање круга $\mathbb{S}^1$, $(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}P^n, \pi)$ из Примера 19 је наткривање пројективног простора сфером.

2. Диференцирање

Постоји велики број уопштења познатог појма

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \tag{36}$$

првог извода функције $f : I \to \mathbb{R}$, где је I интервал у $\mathbb{R}$.

Као што знамо из почетних курсева Анализе, овај појам се природно уопштава са скаларних функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на функције са вредностима у нормираном простору (нпр. за функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$) – десна страна формуле (36) од структуре на кодомену користи само тополошку и векторску, па је уопштење на тај случај прилично праволинијско. Мало сложеније је уопштење на случај кад је и домен тополошки векторски простор, пошто се у (36) h појављује у двострукој улози – као вектор у домену и као скалар којим се дели вектор кодомена (прираштај функције). Извод такве функције, са доменом и кодоменом у нормираним просторима V и W, у тачки $v_0 \in V$ је непрекидно линеарно пресликавање $L : V \to W$, такво да је

$$f(v_0 + h) - f(v_0) = L(h) + o(\|h\|), \qquad \text{кад} \qquad h \to 0. \tag{37}$$

Ова релација је очигледно уопштење дефиниције (36). Ако је $f : S \to W$ пресликавање које је диференцијабилно у свакој тачки скупа $S \subset V$, онда је његов извод пресликавање

$$Df : S \to \mathcal{L}(V; W), \tag{38}$$

где је $\mathcal{L}(V; W)$ простор свих непрекидних линеарних пресликавања из V у W. Овај простор има природну операторску норму, па можемо да говоримо и о изводу пресликавања (38) на исти начин на који смо говорили о изводу пресликавања f. Тај извод, који је по дефиницији други извод пресликавања f, је пресликавање

$$D^2 f : S \to \mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V; W)). \tag{39}$$

Простор $\mathcal{L}(V; \mathcal{L}(V; W))$ се на природан начин идентификује са простором билинеарних пресликавања $V \times V \to W$, који ћемо да означимо са $\mathcal{L}^2(V; W)$. Тако (39) постаје

$$D^2 f : S \to \mathcal{L}^2(V; W). \tag{40}$$

Индукцијом долазимо до појма m–тог извода, као пресликавања

$$D^m f : S \to \mathcal{L}^m(V; W),$$

где је $\mathcal{L}^m(V; W)$ простор m–линеарних пресликавања.

У нормираном простору је

$$f(v) - f(v_0) = L(v - v_0) + o(\|v - v_0\|), \qquad \text{кад} \qquad v \to v_0 \tag{41}$$

еквивалентан запис релације (37). Међутим, пошто израз (41) користи само афину структуру, помоћу њега можемо да дефинишемо извод пресликавања $f : A \to B$ афиних простора A и B, моделираних над нормираним просторима V и W. Извод таквог пресликавања у тачки $a \in A$ је непрекидно линеарно пресликавање $L : V_a A \to W_{f(a)}$, где је V_a векторизација афиног простора A у тачки a (тј. векторски простор, добијен од афиног простора A проглашавањем тачке a за нулу) и $W_{f(a)}$ векторизација афиног простора B у тачки $f(a)$. Ако је пресликавање $f : S \to B$ диференцијабилно у свакој тачки скупа $S \subset A$, његов извод је пресликавање

$$Df : S \to \bigcup_{a \in A} \mathcal{L}(V_a; W_{f(a)}). \tag{42}$$

Транслације у афиним просторима дају канонске идентификације

$$V_a \cong T_a A \cong V \qquad \text{и} \qquad W_{f(a)} \cong T_{f(a)} B \cong W, \tag{43}$$

па је извод (38) у нормираним просторима специјални случај извода (42) у афиним, а (42) специјални случај извода пресликавања многострукости.

За разлику од (38), где је кодомен пресликавања Df опет нормирани векторски простор, па диференцирање без проблема може да се понови и тако дефинише други изводи $D^2 f$, у (42) кодомен није афини простор. Тако смо, већ у класи афиних простора, наишли на прву тешкоћу при уопштавању појма (36) – проблем како дефинисати извод пресликавања (42). Наравно, ову тешкоћу можемо формално да превазиђемо тако у оквиру опште дефиниције пресликавања многострукости, али не можемо да добијемо елегантну интерпретацију као што је (40), пошто се кодомен све више усложњава. На произвољним многострукостима не постоји ни канонска идентификација (43), што додаје још један елемент сложености.

Ако желимо да извод пресликавања дефинишемо као објекат који је истог типа као пресликавање које диференцирамо (као што је (38) пресликавање домена функције f у нормирани векторски простор, дакле објекат истог типа као f), потребан нам је неки други приступ од, веома опште, дефиниције извода пресликавања многострукости, у којој се губе све специфичности пресликавања f сем глаткости. На пример, ако желимо да извод векторског поља буде векторско поље, или да извод диференцијалне форме буде диференцијална форма, потребна нам је нова дефиниција појма извода, која ће уопштити диференцирање у еуклидским просторима.

У сличним ситуацијама, када, док покушавамо да уопштимо неки појам или тврђење, усложњавањем структуре губимо нека њена својства која су нам помагала да тај појам или тврђење разумемо у оригиналном амбијенту, често застанемо да преиспитамо које особине желимо да пренесемо у нови амбијент. Почећемо од алгебарских.

Напомена 9. Овај приступ диференцијалном рачуну донекле је сличан приступу интегралном рачуну помоћу аксиоматског заснивања Данијеловог интеграла. У том приступу, појам интеграла претходи појму мере (која се потом дефинише као интеграл карактеристичне функције): полази се од неке класе $\mathcal{E}$ функција (тзв. елементарних функција) и одређених својстава која желимо да интеграл испуњава (линеарност, монотоност, непрекидност). Та својства се узимају за аксиоме елементарног Данијеловог интеграла $I : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$, а затим се дефинише пресликавање $\int$ на широј класи функција, тако да је рестрикција $\int$ на $\mathcal{E}$ елементарни интеграл I. Слично томе, у диференцијалном рачуну на многострукостима дефинишемо разне врсте извода шире класе објеката, која укључује и функције, тако да је рестрикција тих извода на класу функција класични извод (36). $\diamond$

Дефиниција 22. *Диференцирање* или *деривација* алгебре[12] $\mathcal{A}$ над пољем $\mathbb{K}$ је линеарно пресликавање $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, такво да је

$$D(a \cdot b) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b), \qquad \text{за све} \qquad a, b \in \mathcal{A}. \tag{44}$$

Једнакост (44) назива се *Лајбницовим правилом.* $\diamondsuit$

Пример 20. Нека је $S \subset \mathbb{R}^n$ отворен подскуп. Скуп $\mathcal{A} := C^\infty(S)$ свих глатких функција $f : S \to \mathbb{R}$ је алгебра у односу на множење $f \cdot g(x) = f(x)g(x)$, а парцијални извод

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

диференцирање на алгебри $\mathcal{A}$. Специјално, за $n = 1$ (36) је пример диференцирања. $\sharp$

Пример 21. (Лијев извод функције) Нека је X векторско поље на многострукости M и $\mathcal{A} := C^\infty(M)$ алгебра глатких функција $f : M \to \mathbb{R}$. Тада је

$$D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \qquad Df = df(X)$$

диференцирање на $\mathcal{A}$, које уопштава Пример 20. Ово диференцирање називамо *Лијевим изводом* функције f у правцу X. Приметимо да смо извод функције у правцу *вектора* дефинисали и раније, а да је Лијев извод у правцу *векторског поља* дефинисан као оператор на целој алгебри $C^\infty(M)$. $\sharp$

Задатак 19. Нека је $\mathbb{K}[x]$ прстен полинома, $e \in \mathbb{K}[x]$ полином $e(x) = x$ и $\mathcal{A}$ алгебра свих линеарних (над $\mathbb{K}$) пресликавања $L : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$. Доказати да је са

$$D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \qquad D(L)(p) := eL(p) - L(ep)$$

дефинисано једно диференцирање на $\mathcal{A}$. $\checkmark$

Пример 22. Ако је $\mathcal{A}$ алгебра са јединицом и $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ диференцирање, онда је

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot D(1) + D(1) \cdot 1 = D(1) + D(1),$$

па је $D(1) = 0$. Одатле, због линеарности диференцирања, следи да је $D(\vec{c}) = 0$ где је $\vec{c} := c\,1$ производ скалара c и јединице $1 \in \mathcal{A}$. Ово је уопштење познатог става да је извод константне функције нула. $\sharp$

Пример 23. Нека је $\mathcal{A}$ произвољна алгебра. Њен *комутатор* је пресликавање

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \qquad [a, b] := a \cdot b - b \cdot a.$$

Ако је $c_0 \in \mathcal{A}$ фиксирани елемент, онда је са

$$D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \qquad D(a) := [a, c_0]$$

дефинисано једно диференцирање на $\mathcal{A}$. Специјално, пресликавање D из Задатка 19 је диференцирање. $\sharp$

---

[12] Под алгебром $\mathcal{A}$ над пољем скалара подразумевамо векторски простор над тим пољем, на коме је дефинисано билинеарно множење $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Пример 24. (Лијев извод векторских поља) Нека је M глатка многострукост и $\mathcal{A}$ алгебра свих линеарних пресликавања $L : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$. Пошто свако векторско поље X на M дефинише линеарно пресликавање

$$X : C^\infty(M) \to C^\infty(M), \qquad X(f)(p) := df(p)(X_p),$$

простор $\mathcal{X}(M)$ векторских поља је потпростор векторског простора $\mathcal{A}$. Слично као у Примеру 23, за фиксирано векторско поље $X \in \mathcal{X}(M)$, пресликавање

$$D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \qquad D(L) := [X, L] \tag{45}$$

је диференцирање на $\mathcal{A}$. Специјално, пошто је комутатор два векторска поља векторско поље (видети стр. 12), следи да је добро дефинисано пресликавање

$$L_X : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M), \qquad L_X(Y) := [X, Y], \tag{46}$$

као рестрикција пресликавања (45). Пресликавање (46) назива се *Лијевим изводом* векторских поља у правцу X. ♯

Пример 25. (Лијев извод диференцијалних форми) Нека је

$$\mathcal{A} = \Omega(M) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \Omega^k(M),$$

алгебра диференцијалних форми на многострукости M у односу на спољашње множење. При томе је, по дефиницији, $\Omega^k(M) = \{0\}$ за $k < 0$ и $k > \dim M$. Нека је $X \in \mathcal{X}(M)$ фиксирано векторско поље на M и $\phi_t : M \to M$ њиме генерисана једнопараметарска група дифеоморфизама (видети Теорему 10 и дискусију после ње). Тада је са

$$L_X\alpha := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_t^*\alpha \tag{47}$$

дефинисано диференцирање на алгебри $(\Omega(M), +, \wedge)$. Заиста, пошто је $\phi_t^*(\alpha \wedge \beta) = \phi_t^*\alpha \wedge \phi_t^*\beta$, Лајбницово правило за множење $\wedge$ следи из (47) и стандардног Лајбницовог правила за функције једне реалне променљиве. ♯

Задатак 20. Користећи правило за извод сложене функције

$$\phi_t^* \circ d = d \circ \phi_t^*,$$

доказати да Лијев извод диференцијалне форме комутира за спољашњим:

$$d \circ L_X = L_X \circ d.$$

Прецизније, доказати да је $d(L_X\alpha) = L_X(d\alpha)$ за све $X \in \mathcal{X}(M)$ и $\alpha \in \Omega(M)$. ✓

Подсетимо се да за спољашњи диференцијал $d : \Omega^i(M) \to \Omega^{i+1}(M)$ важи

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^j \alpha \wedge d\beta \qquad \text{за} \qquad \alpha \in \Omega^j(M),\ \beta \in \Omega^k(M),$$

што није исто Лајбницово правило као у Дефиницији 22, док из Примера 25 видимо да Лијев извод задовољава управо то Лајбницово правило:

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = (L_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_X\beta).$$

Дакле, Лијев извод је диференцирање у смислу Дефиниције 22, а спољашњи није. Спољашњи диференцијал d је диференцирање у смислу следеће дефиниције.

Дефиниција 23. *Градуисана алгебра* је алгебра $\mathcal{A}$ облика

$$\mathcal{A} = \bigoplus_k \mathcal{A}_k,$$

где су $\mathcal{A}_k$ векторски потпростори, а множење има особину $\mathcal{A}_j \cdot \mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$, тј.

$$a \in \mathcal{A}_i,\ b \in \mathcal{A}_j \quad \Rightarrow \quad a \cdot b \in \mathcal{A}_{i+j}.$$

За елементе из $\mathcal{A}_k$ кажемо да имају *степен* k; степен елемента $a \in \mathcal{A}$ означавамо са $\deg a$. Линеарно пресликавање $d : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ је *диференцијал* (користе се још и термини *градуисани диференцијал*, *антидиференцирање* или *антидеривација*) степена r ако је

$$d(\mathcal{A}_k) \subset \mathcal{A}_{k+r} \qquad \text{и} \qquad d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + (-1)^{\deg a} a \cdot d(b).$$

Пар $(\mathcal{A}, d)$ назива се *диференцијалном градуисаном алгебром.*

Пример 26. Пар $(\Omega(M), d)$ где је $\Omega(M)$ алгебра диференцијалних форми, а d спољашњи диференцијал, је диференцијална градуисана алгебра. Спољашњи диференцијал d је (анти)диференцијал степена $r = 1$. $\sharp$

Пример 27. (Унутрашњи извод диференцијалних форми) Нека је M глатка многострукост, $\Omega(M)$ градуисана алгебра диференцијалних форми на M и $X \in \mathcal{X}(M)$ векторско поље. Из дефиниције спољашњег множења (односно из особине да при пермутацији колона детерминанта мења знак) следи да за пресликавање

$$i_X : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M), \qquad i_X\alpha(Y_1, \ldots, Y_{k-1}) := \alpha(X, Y_1, \ldots, Y_{k-1})$$

важи

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge (i_X\beta).$$

Другим речима, i_X је (анти)диференцијал степена $r = -1$. Специјално,

$$i_X : \Omega^0(M) = C^\infty(M) \to \Omega^{-1}(M) = \{0\},$$

тј. $i_X f = 0$ за сваку функцију $f : M \to \mathbb{R}$.

Диференцијал i_X називамо *унутрашњим диференцијалом.* Користе се и термини *унутрашње множење* (или *контракција*) форме диференцијалним пољем. Уз ознаку $i_X\alpha$ користе се и ознаке $i(X)\alpha$ и $X \lrcorner \alpha$. $\sharp$

Задатак 21. Доказати да је

$$i_X df = L_X f \tag{48}$$

за сваку глатку функцију $f : M \to \mathbb{R}$ и векторско поље $X \in \mathcal{X}(M)$. Користећи чињеницу да је L_X диференцирање, а d и i_X антидиференцирања, извести *Картанову формулу*

$$L_X = i_X \circ d + d \circ i_X,$$

тј. показати, индукцијом по k, да за сваку форму $\alpha \in \Omega^k(M)$ важи

$$L_X\alpha = i_X d\alpha + d i_X \alpha.$$

Показати да је

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\alpha = \psi_t^*(i_X d\alpha + d i_X\alpha) \tag{49}$$

где је ψ_t фамилија дифеоморфизама генерисана векторским пољем X, еквивалентан запис Картанове формуле. ✓

Напомена 10. Ако су пресликавања $\psi_0, \psi_1 : M \to N$ хомотопна, онда постоји *глатка* хомотопија ψ_t између њих (видети Теорему 1 на стр. 4). Нека је α *затворена* k–форма, тј. $d\alpha = 0$. Интеграцијом (49) добијамо

$$\psi_1^*\alpha - \psi_0^*\alpha = d\int_0^1 \psi_t^*(i_X\alpha)\,dt,$$

па је форма $\psi_1^*\alpha - \psi_0^*\alpha$ тачна. Одатле следи да пресликавања ψ_0^* и ψ_1^* дефинишу исто пресликавање на де Рамовој кохомологији:

$$\psi_0^* = \psi_1^* : H^k_{dR}(M) \to H^k_{dR}(N).$$

Ако су M и N хомотопски еквивалентне многострукости, тј. ако постоје пресликавања

$$f : M \to N, \quad g : N \to M, \quad \text{таква да је} \quad f \circ g \simeq \mathrm{id}_N, \quad g \circ f \simeq \mathrm{id}_N,$$

онда су

$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^* : H^k_{dR}(M) \to H^k_{dR}(M) \text{ и } g^* \circ f^* = (f \circ g)^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(N)$$

идентичка пресликавања, па су

$$f^* : H^k_{dR}(N) \to H^k_{dR}(M), \quad f^* : H^k_{dR}(M) \to H^k_{dR}(N)$$

изоморфизми. Тиме је доказано тврђење из Напомене 3 на стр. 18 да је де Рамова кохомологија хомотопска инваријанта. ◇

Задатак 22. Доказати да за исто векторско поље X Лијев извод комутира са унутрашњим, тј. да је $L_X \circ i_X = i_X \circ L_X$. ✓

Задатак 23. Користећи везу између Лијевог извода $L_{X_i}X_j := [X_i, X_j]$ и спољашњег извода d, установљену у Леми 2 (стр. 24), извести де Рамов идентитет $d \circ d = 0$ из Јакобијевог идентитета (11) (стр. 12). И обрнуто, извести Јакобијев идентитет из де Рамовог. ✓

Напомена 11. Још неке особине унутрашњег, спољашњег и Лијевог извода су

(а) $i_{[X,Y]} = L_X \circ i_Y - i_Y \circ L_X$, тј. $i_{[X,Y]} = [L_X, i_Y]$;
(б) $L_{[X,Y]} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$, тј. $L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$;
(в) $i_{fX}\alpha = f i_X\alpha$;
(г) $L_{fX}\alpha = fL_X\alpha + df \wedge i_X\alpha$;
(д) $\psi^* \circ i_X = i_{\psi^*X} \circ \psi^*$, тј. $\psi^*(i_X\alpha) = i_{\psi^*X}(\psi^*\alpha)$, за дифеоморфизам[13] ψ,

где су X и Y векторска поља, α диференцијална форма и f функција.

Задатак 24. Дати су диференцијална форма и векторско поље

$$\zeta = x\,dx \wedge dy + y^2\,dy \wedge dz, \quad X = y\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

у $\mathbb{R}^3$. Израчунати Лијев извод $L_X\zeta$. ✓

Подсетимо се да на оријентисаним многострукостима Стоксова формула

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \qquad \text{за} \qquad \omega \in \Omega^{\dim M - 1}(M)$$

[13] Ако је ψ дифеоморфизам, онда је, по дефиницији, $\psi^*X := \psi_*^{-1}X$ за векторско поље X. Слично, по дефиницији је $\psi_*\alpha := (\psi^{-1})^*\alpha$ за диференцијалну форму α.

успоставља дуалност између спољашњег диференцијала d, који повећава степен форме за један, и „оператора границе" ∂, који смањује димензију многострукости за један. Унутрашњи диференцијал, обрнуто од спољашњег, смањује степен форме за један; његова веза са оператором ∂ је формула

$$\int_{\partial M} i_X\omega = \int_M L_X\omega$$

која лако следи из Стоксове и Картанове. $\diamond$

Задатак 25. Нека је M компактна многострукост димензије n без границе. Доказати да важи

$$\int_M (L_X\alpha)\wedge\beta = -\int_M \alpha\wedge(L_X\beta)$$

за свако векторско поље X и форме $\alpha\in\Omega^k(M)$, $\beta\in\Omega^{n-k}(M)$. ✓

Пример 28. **(Дивергенција векторског поља)** Нека је M оријентисана многострукост димензије n и $\mu\in\Omega^n(M)$ форма запремине на њој. Ако је X векторско поље, онда је $i_X\mu\in\Omega^{n-1}(M)$, па је $d(i_X\mu)\in\Omega^n(M)$. Пошто је $\dim M=n$, форме μ и $d(i_X\mu)$ су пропорционалне (као елементи модула $\Omega^n(M)$ над прстеном $C^\infty(M)$). Коефицијент пропорционалности називамо *дивергенцијом* векторског поља X и означавамо га са $\operatorname{div}X$. Другим речима, дивергенција векторског поља је дефинисана једначином

$$d(i_X\mu) = (\operatorname{div}X)\mu$$

и зависи од избора форме запремине.

Специјално ако је $M=\mathbb{R}^n$ и $\mu=dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$, добијамо класичну дефиницију дивергенције у еуклидском простору: $\operatorname{div}X=\nabla\cdot X$. $\sharp$

Задатак 26. Доказати да је $\operatorname{div}[X,Y]=X\operatorname{div}Y-Y\operatorname{div}X$. ✓

Задатак 27. Доказати да једнопараметарска фамилија дифеоморфизама $\varphi_t: M\to M$ генерисана векторским пољем X чува запремину ако и само ако је $\operatorname{div}X=0$. ✓

Функције, векторска поља и диференцијалне форме, о чијем смо диференцирању до сада говорили, су специјални случај општије класе објеката коју издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 24. Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{K}$ и V^* његов дуал. *Тензор* реда (r,s) на V је вишелинеарно пресликавање

$$\Phi:\underbrace{V\times\ldots\times V}_{r}\times\underbrace{V^*\times\ldots\times V^*}_{s}\to\mathbb{K}.$$

Број r се назива *коваријантним*, а s *контраваријантним редом* тензора Φ. Ако је $r=0$ тензор називамо *контраваријантним*, а ако је $s=0$ *коваријантним*. Скуп свих тензора реда (r,s) на V је векторски простор; означавамо га са $\mathcal{T}_r^s(V)$. Простор

$$\mathcal{T}(V) := \bigoplus_{(r,s)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \mathcal{T}_r^s(V),$$

где је, по дефиницији, $\mathcal{T}_r^s(V)=\{0\}$ ако је $r<0$ или $s<0$ и $\mathcal{T}_0^0(V):=\mathbb{K}$ називамо *тензорском алгебром* на V. Структура алгебре је задата стандардним тензорским множењем пресликавања $\mathcal{T}_{r_1}^{s_1}(V) \times \mathcal{T}_{r_2}^{s_2}(V) \ni (\Phi_1, \Phi_2) \mapsto \Phi_1 \otimes \Phi_2 \in \mathcal{T}_{r_1+r_2}^{s_1+s_2}(V)$:

$$\Phi_1 \otimes \Phi_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*) := \Phi_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1^*)\Phi_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2^*),$$

где је $\mathbf{v}_1 := (v_1^1, \ldots, v_1^{s_1})$ и слично за остале аргументе.

Коваријантни тензор реда $(r, 0)$ називамо *симетричним* ако је инваријантан у односу на пермутације својих аргумената, тј. ако је

$$\Phi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}) = \Phi(v_1, \ldots, v_r)$$

за сваку пермутацију $\sigma : \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, r\}$, а *антисиметричним* ако је за сваку такву пермутацију

$$\Phi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}) = (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}\Phi(v_1, \ldots, v_r)$$

где је $\operatorname{sgn}\sigma$ број транспозиција у пермутацији σ, по модулу 2. Слично се дефинишу симетрични и антисиметрични контраваријантни тензори.

Тензорско поље реда (r, s) на многострукости M је пресликавање

$$\Psi : M \to \bigcup_{p\in M} \mathcal{T}_r^s(T_pM), \qquad p \mapsto \Psi_p \in \mathcal{T}_r^s(T_pM),$$

које је глатко у смислу да је за сваку r–торку глатких векторских поља и сваку s–торку глатких ковекторских поља

$$X^1, \ldots, X^r \in \mathcal{X}(M), \qquad \alpha^1, \ldots, \alpha^s \in \Omega^1(M)$$

пресликавање

$$M \to \mathbb{R}, \qquad p \mapsto \Psi_p(X_p^1, \ldots, X_p^r, \alpha^1,_p \ldots, \alpha_p^s)$$

глатка функција на M. Скуп свих тензорских поља реда (r, s) на M је векторски простор; означавамо га са $\mathcal{T}_r^s(TM)$. Алгебра

$$\mathcal{T}(TM) := \bigoplus_{(r,s)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \mathcal{T}_r^s(TM)$$

где је, по дефиницији, $\mathcal{T}_r^s(TM) = \{0\}$ ако је $r < 0$ или $s < 0$ и $\mathcal{T}_0^0(TM) := C^\infty(M)$, назива се *тензорском алгебром* многострукости M. $\diamondsuit$

Пример 29. Скаларни производ на векторском простору V је симетрични коваријантни тензор реда $(2, 0)$ који задовољава услов недегенерисаности

$$\Psi(v, v) \geq 0 \qquad \text{и} \qquad \Psi(v, v) = 0 \ \Leftrightarrow v = 0.$$

Риманова метрика на многострукости M је глатко коваријантно тензорско поље реда $(2, 0)$ која задовољава услов недегенерисаности у свакој тачки $p \in M$ (тј. на сваком векторском простору T_pM). $\sharp$

Пример 30. Диференцијалне k–форме су антисиметрична коваријантна тензорска поља реда $(k, 0)$. Специјално, $\Omega^1(M) = \mathcal{T}_1^0(TM)$. За $k > 1$ инклузија $\Omega^k(M) \subset \mathcal{T}_k^0(TM)$ је строга. $\sharp$

Пример 31. Векторска поља су контраваријантни тензори реда $(0, 1)$. Свако векторско поље $X \in \mathcal{X}(M)$ дефинише глатку фамилију линеарних пресликавања

$$T_p^*M \to \mathbb{R}, \qquad \eta_p \mapsto \eta_p(X_p).$$

Пошто су T_pM и простор линеарних функционала на T_p^*M векторски простори исте димензије, одатле следи да је $\mathcal{X}(M) = \mathcal{T}_0^1(TM)$. $\sharp$

Задатак 28. Нека је V векторски простор коначне димензије над пољем $\mathbb{K}$. Доказати да је простор $\mathcal{T}_r^1(V)$ изоморфан простору свих r–линеарних пресликавања

$$\underbrace{V \times \ldots \times V}_{r} \to V.$$

Формулисати и доказати одговарајуће тврђење за $\mathcal{T}_1^s(V)$. ✓

Пример 32. Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{K}$ и V^* његов дуал. Тада је са

$$C : V \times V^* \to \mathbb{K}, \qquad (v, v^*) \mapsto \langle v^*, v \rangle,$$

где је $\langle v^*, v \rangle$ вредност функционала v^* на вектору v, дефинисан тензор реда $(1, 1)$, који се назива *контракцијом*. $\sharp$

Уз малу помоћ Линеарне алгебре можемо да закључимо да је, за векторски простор V,

$$\mathcal{T}_r^s(V) \cong \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{r} \otimes \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{s}. \tag{50}$$

Пример 32 може да се уопшти и за сваки пар $(i, j) \in \{1, \ldots, r\} \times \{1, \ldots, s\}$ дефинише контракција

$$C_i^j : \mathcal{T}_r^s(V) \to \mathcal{T}_{r-1}^{s-1}(V)$$

помоћу идентификације (50), са

$$C_i^j(v_1^* \otimes \ldots \otimes v_r^* \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_s) := \langle v_i^*, v_j \rangle v_1^* \otimes \ldots \otimes \widehat{v_i^*} \otimes \ldots \otimes v_r^* \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{v_j} \otimes \ldots \otimes v_s,$$

где је $\widehat{\cdot}$ „узималица”, која означава да је тај члан изостављен.

Дефиниција 25. Нека је V векторски простор и $\mathcal{T}(V)$ његова тензорска алгебра. Линеарно пресликавање

$$D : \mathcal{T}(V) \to \mathcal{T}(V)$$

се назива *диференцирањем* (или *деривацијом*) тензорске алгебре ако важи:

(а) $D(\Psi \otimes \Phi) = D(\Psi) \otimes \Phi + \Psi \otimes D(\Phi)$ (Лајбницово правило);
(б) D чува тип: $D(\mathcal{T}_r^s(V)) \subset \mathcal{T}_r^s(V)$;
(в) D комутира са контракцијама.

Ако је M глатка многострукост и $\mathcal{T}(TM)$ њена тензорска алгебра, пресликавање $D : \mathcal{T}(TM) \to \mathcal{T}(TM)$ је диференцирање (или деривација) ако је за све $p \in M$ његова рестрикција на $\mathcal{T}(T_pM)$ диференцирање. $\Diamond$

Пример 33. Нека је V векторски простор коначне димензије. Сваки тензор Θ типа $(1, 1)$ може да се посматра и као диференцирање на $\mathcal{T}(V)$ на следећи начин. Из Рисове теореме о репрезентацији следи да је задавање билинеарног пресликавања

$$\Theta : V \times V^* \to \mathbb{R}$$

еквивалентно задавању пресликавања

$$\widetilde{\Theta} : V \to V.$$

Пресликавање $\widetilde{\Theta}$ и његов дуал $\widetilde{\Theta}^* : V^* \to V^*$ се, помоћу Лајбницовог правила, проширују до диференцирања на $\mathcal{T}(V)$. $\sharp$

У поређењу са диференцирањем у општим алгебрама које смо увели Дефиницијом 22, за диференцирање тензора уз Лајбницово правило захтевамо још и услове (б) и (в). Према томе, унутрашње и спољашње диференцирање не могу да се прошире до диференцирања тензорске алгебре у смислу Дефинције 25. Што се тиче Лијевог извода, њега смо за сада дефинисали само за функције, форме и векторска поља, тј. на просторима $\mathcal{T}_0^0(TM)$, $\mathcal{T}_1^0(TM)$ и $\mathcal{T}_0^1(TM)$. Међутим, уз помоћ Лајбницовог правила, Лијев извод може да се продужи на целу тензорску алгебру $\mathcal{T}(TM)$: у изразу

$$\begin{aligned} L_X(\Psi(Y_1,\dots,Y_r,\alpha_1,\dots,\alpha_s)) \quad &= (L_X\Psi)(Y_1,\dots,Y_r,\alpha_1,\dots,\alpha_s)+ \\ &+\textstyle\sum_{i=1}^r \Psi(Y_1,\dots,L_XY_i,\dots,Y_r,\alpha_1,\dots,\alpha_s)+ \\ &+\textstyle\sum_{j=1}^s \Psi(Y_1,\dots,Y_r,\alpha_1,\dots,L_X\alpha_j,\dots,\alpha_s) \end{aligned}$$

једина недефинисана величина је први сабирак на десној страни (остала два сабирка на десној страни садрже већ дефинисане Лијеве изводе векторског поља и форме, а на левој страни је извод функције), па тај израз можемо да сматрамо његовом дефиницијом. Исто резоновање може да се примени на произвољно диференцирање D уместо Лијевог. Приметимо да је довољно да диференцирање буде дефинисано на функцијама и векторским пољима: извод ковекторског поља, тј. диференцијалне форме, такође може да се изведе из Лајбницовог правила:

$$D(\eta(Y)) = (D\eta)(Y) + \eta(DY),$$

тј. да се $D\eta$ дефинише као $(D\eta)(Y) := D(\eta(Y)) - \eta(DY)$.

Сличним аргументима могу да се докажу следеће леме.

Лема 3. *Нека је M глатка многострукост и нека су D_1 и D_2 два диференцирања на тензорској алгебри $\mathcal{T}(TM)$. Ако је $D_1 = D_2$ на $C^\infty(M) = \mathcal{T}_0^0(TM)$ и $\mathcal{X}(M) = \mathcal{T}_0^1(TM)$, онда је $D_1 \equiv D_2$ на $\mathcal{T}(TM)$.*

Лема 4. *Свако диференцирање D на $\mathcal{T}(TM)$ је облика*

$$D = L_X + \Theta,$$

где је X неко векторско поље на M, а Θ тензорско поље реда $(1,1)$.

Тензорско поље Θ у Леми 4 се интерпретира као диференцирање у смислу Примера 33. Приметимо да Лема 4 следи из Леме 3. Заста, из чињенице да је рестрикција пресликавања D на $\mathcal{T}_0^0(TM) = C^\infty(M)$ пресликавање

$$D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

(овде се користи својство (б) Дефиниције 25) које је линеарно и задовољава Лајбницово правило, следи да је $Df = X(f)$ за неко векторско поље X и сваку функцију f, тј. $D = L_X$ на $\mathcal{T}_0^0(TM)$. Остаје још само да се разлика $D - L_X$ на $\mathcal{X}(M) = \mathcal{T}_0^1(TM)$ означи са Θ и интерпретира као тензор типа $(1,1)$ као у Примеру 33.

Пример 34. (Коваријантно диференцирање – увод) Нека је $M \subset \mathbb{R}^n$ глатка подмногострукост $X_p \in T_pM$ тангентни вектор у тачки $p \in M$ и $Y \in \mathcal{X}(M)$ тангентно векторско поље. Векторско поље Y може да се посматра и као пресликавање

$$Y : M \to \mathbb{R}^n$$

и диференцира, као пресликавање са вредностима у векторском простору, у правцу вектора X_p – ако је $\gamma(t)$ крива која је у тачки $p = \gamma(0)$ тангентна на X_p, онда је

$$DY(X_p) = \lim_{h\to 0} \frac{Y(\gamma(h)) - Y(\gamma(0))}{h}.$$

Вектор $DY(X_p)$ не мора да буде тангентан на M, али можемо да га пројектујемо[14] на T_pM и добијени вектор означимо са $\nabla_{X_p}Y$. Ако је X тангентно векторско поље, онда је и $\nabla_X Y$ тангентно векторско поље на M, које називамо *коваријантним изводом* векторског поља Y у правцу X. Пошто је $\mathcal{X}(M) = \mathcal{T}_0^1(TM)$, тиме је дефинисано пресликавање

$$\nabla_X : \mathcal{T}_0^1(TM) \to \mathcal{T}_0^1(TM).$$

Ако дефинишемо пресликавање $\nabla_X : \mathcal{T}_0^1(TM) \to \mathcal{T}_0^1(TM)$ тако да се оно поклапа са обичним изводом у правцу вектора X на $C^\infty(M) = \mathcal{T}_0^0(TM)$, можемо, као у Леми 3 и дискусији пре ње, да га продужимо до јединственог диференцирања

$$\nabla_X : \mathcal{T}(TM) \to \mathcal{T}(TM),$$

које називамо *коваријантним диференцирањем* тензорских поља на M. На пример, коваријантни извод Риманове метрике g на M је

$$(\nabla_X g)(Y, Z) := X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z).$$

Ова конструкција може да се спроведе и ван амбијентног простора $\mathbb{R}^n$ и повезана је са уопштењем појма паралелности из Еуклидске геометрије који је, као што нам је познато, био полазна тачка открића нееуклидских геометрија. Том конструкцијом ћемо се детаљно бавити у Глави 1. $\sharp$

Задатак 29. Доказати да је

$$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y \qquad \text{и} \qquad L_{fX} Y = fL_X Y - Y(f)X$$

за векторска поља X, Y и функцију f. ✓

Претходни задатак указује на различита својства Лијевог и коваријантног извода. Приметимо да је Лијев извод једнозначно дефинисан самом структуром многострукости, док коваријантни извод зависи од избора пројекције која учествује у његовој дефиницији. Лијев извод је антисиметричан, тј. важи $L_X Y = -L_Y X$, док за коваријантни извод, у општем случају, не постоји веза између $\nabla_X Y$ и $\nabla_Y X$. Ако су коваријантни и Лијев извод повезани релацијом

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = L_X Y,$$

кажемо да је коваријантни извод *симетричан* или *без торзије*. Ако је многострукост Риманова, тј. ако је на њој задата Риманова метрика $g \in \mathcal{T}_2^0(TM)$, за коваријантни извод кажемо да је *сагласан са метриком* ако је $\nabla_X g = 0$ за свако векторско поље $X \in \mathcal{X}(M)$. У Глави 1 ћемо да видимо да на је на Римановој многострукости постоји јединствено коваријантно диференцирање које је симетрично и сагласно са метриком. Такав коваријантни извод називаћемо *Леви–Чивитиним* коваријантним изводом.

[14] Наравно, избор ове пројекције није јединствен, различити избори пројекција даће нам различита диференцирања на $\mathcal{T}(TM)$.

Задатак 30. Нека је на Римановој многострукости M са Римановом метриком g задат Леви–Чивитин коваријантни извод ∇. Доказати да је

$$L_X(X^\flat) = (\nabla_X X)^\flat + \frac{1}{2} d\|X\|^2,$$

где је $Z^\flat$ дуал у векторског поља Z у односу на метрику g, тј. ковекторско поље дефинисано са $Z^\flat(Y) = g(Z, Y)$, а $d\|X\|^2$ спољашњи диференцијал функције $p \mapsto \|X_p\|^2 = g_p(X_p, X_p)$. ✓

За разлику од услова $\nabla_X g = 0$ за све X, немогуће је очекивати да буде $L_X g = 0$ за све X. Векторско поље X за које важи $L_X g = 0$ назива се *Килинговим векторским пољем.* Једнопараметарска група дифеоморфизама ψ_t генерисана Килинговим векторским пољем чува Риманову метрику g, тј. важи $\psi_t^* g = g$.

Задатак 31. Нека је ∇ Леви–Чивитин коваријантни извод на Римановој многострукости M са Римановом метриком g. Доказати да је векторско поље X Килингово ако и само ако је

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0 \qquad \text{за све} \qquad Y, Z \in \mathcal{X}(M). \tag{51}$$

Другим речима, X је Килингово векторско поље ако и само ако је линеарни оператор

$$\nabla . X : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M), \qquad Y \mapsto \nabla_Y X$$

симетричан у односу на метрику g. Једначина (51) назива се *Килинговом једначином.* ♯

3. Кратки увод у диференцијалну топологију

3.1. Нормална раслојења и цевасте околине. Нека је M глатка многострукост и $N \subset M$. Скуп

$$T_N M := \bigcup_{p \in N} T_p M$$

називамо *рестрикцијом* тангентног раслојења TM на подскуп N. Ако је N глатка подмногострукост, $T_N M$ је многострукост димензије $\dim N + \dim M$. У свакој тачки $p \in N$ многострукост N има свој тангентни простор $T_p N$. Количнички простор $\nu_p N := T_p M / T_p N$ називамо *нормалним простором* подмногострукости N у тачки p, а унију

$$\nu N := \bigcup_{p \in N} \nu_p N$$

нормалним раслојењем подмногострукост N. Нормално раслојење νN има структуру глатке многострукости и при томе је $\dim \nu N = \dim M$.

Теорема 18. **(Теорема о цевастој околини)** *Нека је M глатка многострукост и $N \subset M$ њена глатка подмногострукост. Тада постоји отворена околина $U \subset N$ која је дифеоморфна околини нултог сечења нормалног раслојења νN.*

Околина U из претходне теореме назива се *цевастом околином* подмногострукости N.

Теорема 19. **(Теорема о крагни)** *Нека је M глатка многострукост са границом ∂M. Тада постоји отворена околина $U \supset \partial M$ дифеоморфна скупу $[0,1[\times \partial M$.*

Околина U из претходне теореме назива се *крагном* границе ∂M.

Доказе ове две теореме видећемо у Глави 1.

3.2. Поенкареова дуалност. Нека је M компактна оријентисана многострукост без границе, и нека је $\dim M = n$. Из Стоксове теореме следи да је са

$$\int_M : H^n_{dR}(M) \to \mathbb{R}, \qquad [\zeta] \mapsto \int_M \zeta \tag{52}$$

добро дефинисано линеарно пресликавање. Заиста, ако је $[\zeta_1] = [\zeta_2]$ у $H^n_{dR}(M)$, онда је $\zeta_1 = \zeta_2 + d\eta$ за неку форму $\eta \in \Omega^{n-1}(M)$. Из Стоксове теореме следи

$$\int_M \zeta_1 - \int_M \zeta_2 = \int_M d\eta = \int_{\partial M = \emptyset} \eta = 0,$$

па интеграл у (52) не зависи од избора форме која дефинише дату де Рамову кохомолошку класу. Када не постоји опасност од неспоразума, означаваћемо са $\int_M \eta$ и интеграл форме и вредност линеарног пресликавања (52) на кохомолошкој класи $[\eta]$.

На сличан начин се доказује да је добро дефинисано билинеарно пресликавање

$$\int_M : H^k_{dR}(M) \otimes H^{n-k}_{dR}(M), \to [\zeta] \otimes [\eta] \mapsto \int_M \eta \wedge \zeta. \tag{53}$$

Може да се докаже да је ово билинеарно пресликавање недегерисано (доказ може да се види у [**18**]).

Нека је $S \subset M$ компактна оријентисана подмногострукост без границе и нека је $j : S \hookrightarrow M$ улагање. Ако је $\dim S = k$, онда је, слично као (52), линеарно пресликавање

$$\int_S : H^k_{dR}(M) \to \mathbb{R}, \qquad [\zeta] \mapsto \int_S j^*\zeta \tag{54}$$

добро дефинисано. Из Рисове теореме о репрезентацији линеарних функционала следи да постоји вектор PD(S) $\in H^{n-k}(M)$ такав да се његовим спаривањем са недегенерисаном билинеарном формом (53) добија функционал (54); другим речима

$$\int_S j^*\eta = \int_M \eta \wedge \mathrm{PD}(S). \tag{55}$$

Форму $j^*\eta$ називамо *рестрикцијом* форме η на подмногострукост S; када не постоји потреба за сувише прецизним ознакама, рестрикцију форме означавамо истим словом; тако нпр. уместо (55) пишемо

$$\int_S \eta = \int_M \eta \wedge \mathrm{PD}(S).$$

Дефиниција 26. Кохомолошка класа $\mathrm{PD}(S) \in H^{n-k}(M)$ дефинисана једначином (55) назива се *Поенкареовим дуалом* подмногострукости S. $\diamondsuit$

Пример 35. Ако је M повезана, компактна и без границе, онда је $\mathrm{PD}(M) = 1 \in H^0(M) \cong \mathbb{R}$. $\sharp$

Задатак 32. Шта је $\mathrm{PD}(M)$ ако M није повезана? Шта је Поенкареов дуал неке компоненте повезаности? $\checkmark$

Пример 36. Нека је M повезана оријентисана компактна многострукост димензије n без границе. Ако је $p \in M$, интеграл 0–форме (тј. функције) f по $N = \{p\}$ је, по дефиницији, вредност $f(p)$. Затворене 0–форме на M су константне функције, одакле видимо да је Поенкареов дуал $\mathrm{PD}(\{p\})$ кохомолошка класа у $H^n(M)$ таква да је

$$\int_M \mathrm{PD}(\{p\}) = 1. \tag{56}$$

Приметимо да ова класа може да се реализује n–формом која има носач у произвољно малој отвореној околини тачке p. Прецизније, лако је наћи n–форму $a(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ у $\mathbb{R}^n$ која задовољава (56) и има носач у произвољно малој околини нуле, а тиме и такву форму у произвољно малој локалној карти око p. Она је затворена због димензије, па дефинише кохомолошку класу, која због (56) дефинише Поенкареов дуал тачке.

Приметимо да је *свака* n–форма која задовољава (56) Поенкареов дуал (сваке) тачке, па све такве форме припадају истој кохомолошкој класи. Пошто произвољна n–форма може да се помножи константом тако да важи (56), следи да је n–та де Рамова кохомологија повезане оријентисане компактне многострукости димензије n без границе

$$H^n(M) \cong \mathbb{R} \tag{57}$$

и да је пресликавање

$$\int_M : H^n(M) \to \mathbb{R}$$

изоморфизам. Ово је прецизније тврђење од Последице 6 на стр. 21. $\sharp$

Задатак 33. Шта је Поенкареов дуал коначног скупа $N = \{p_1, \dots, p_k\}$? ✓

Напомена 12. (де Рамова кохомологија са компактним носачем) У претходним разматрањима смо претпоставили да је M (сем што је оријентисана) компактна и без границе, да би интеграл (52) био дефинисан. Ови услови могу да се ослабе. Ако је M оријентисана многострукост која није компактна, интеграл је и даље дефинисан, али за диференцијалне форме *са компактним носачем*. Слично, ако M има границу, интеграл је дефинисан за диференцијалне форме чији је носач компактан подскуп у $M \setminus \partial M$. Означимо овакве форме са $\Omega_c^k(M)$, за $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $n = \dim M$.

Јасно је да је диференцијал форме са компактним носачем опет форма са компактним носачем. Тако стижемо до дефиниције *де Рамове кохомологије са компактним носачем* $H_c^k(M)$, која је иста као дефиниција обичне де Рамове кохомологије, само са формама $\Omega_c^k(M)$ уместо $\Omega^k(M)$. Ако са $Z_c^k(M)$ означимо k–форме са компактним носачем чији је диференцијал једнак нули, а са $B_c^k(M)$ k-форме облика $d\eta$ за $\eta \in \Omega_c^{k-1}(\mathrm{M})$, k–та де Рамова кохомологија са компактним носачем је

$$H_c^k(M) := B_c^k(M)/Z_c^k(M).$$

За разлику од обичне де Рамове кохомологије, пресликавање $F : M \to N$ не индукује пресликавање

$$F^* : H_c^k(N) \to H_c^k(M) \tag{58}$$

(нпр, ако је F пројекција $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, онда $F^*\eta$ нема компактан носач сем ако је $\eta = 0$). Ако је F дифеоморфизам, онда је скуп $K \subset M$ компактан ако и само ако је $F(K)$ компактан, па је у случају дифеоморфизама пресликавање (58) добро дефинисано.

Као у случају обичне де Рамове кохомологије, из $(F\circ G)^* = G^*\circ F^*$ следи да дифеоморфне многострукости имају изоморфне де Рамове кохомологије са компактним носачем. Међутим, треба имати у виду важну чињеницу да де Рамова кохомологија са компактним носачем *није* хомотопска инваријанта. На пример, Поенкареова лема за обичну де Рамову кохомологију гласи

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k=0 \\ 0, & k\neq 0 \end{cases} \tag{59}$$

док за де Рамову кохомологију са компактним носачем важи

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k=n \\ 0, & k\neq n. \end{cases} \tag{60}$$

Ово се лако види у случају $n=1$: затворена 0–форма на $\mathbb{R}$ са компактним носачем је константна функција са компактним носачем, дакле нула. Одатле следи $H_c^0(\mathbb{R}) = 0$. Остаје да израчунамо кохомологију $H_{dR}^1(M)$. Пошто је $\Omega_c^2(\mathbb{R}) = 0$, свака 1–форма са компактним носачем је затворена (па је $B_c^1(\mathbb{R}) = \Omega_c^1(\mathbb{R})$) и облика $f(x)\,dx$, где је f глатка функција са компактним носачем. Ако је $f(x)\,dx$ тачна у алгебри форми *са компактним носачем*, онда је $f(x) = g'(x)$ за неку функцију g са компактним носачем, па је

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = g(+\infty) - g(-\infty) = 0.$$

Обрнуто, ако је $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 0$, онда је

$$g(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

функција са компактним носачем и $f(x)\,dx = dg$. Другим речима, језгро пресликавања

$$\int_{\mathbb{R}} : B_c^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

је $Z_c^1(\mathbb{R})$, одакле добијамо $H_c^1(\mathbb{R}) := B_c^1(\mathbb{R})/Z_c^1(\mathbb{R}) = B_1(\mathbb{R})/\mathrm{ker}\int_{\mathbb{R}} \cong \mathrm{im}\int_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. Тиме смо показали (60) за $n=1$.

Ради поређења приметимо да је, без претпоставке о компактности, свака константна функција затворена 0–форма, па је $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, док је за *сваку* 1–форму $f(x)\,dx$ добро дефинисана њена примитивна функција

$$g(x) := \int_{0}^{x} f(t)\,dt,$$

ако не захтевамо компактност њеног носача, па је $H^1(\mathbb{R}) = 0$. Одакте следи (59) за $n=1$.

Инклузија $\Omega_c^k(M) \hookrightarrow \Omega^k(M)$ индукује линеарно пресликавање

$$H_c^k(M) \to H^k(M). \tag{61}$$

Ово пресликавање у општем случају није инјективно: k–форма η са компактним носачем може да буде диференцијал форме из $\Omega^{k-1}(M)$, а да при томе не буде диференцијал неке форме са компактним носачем (као што смо управо видели већ на најједноставнијем примеру $k = 1$ и $M = \mathbb{R}$), па у том случају пресликавање (61) има нетривијално језгро.

Модификација форме (53)

$$\int_M : H_c^k(M) \otimes H^{n-k}(M) \to \mathbb{R}, \quad [\zeta] \otimes [\eta] \mapsto \int_M \eta \wedge \zeta \tag{62}$$

је добро дефинисана билинеарна форма, која је недегенерисана, уколико M има коначно добро покривање[15]. Слично, добро је дефинисана и недегенерисана билинеарна форма

$$\int_M : H^k(M) \otimes H_c^{n-k}(M) \to \mathbb{R}, \quad [\zeta] \otimes [\eta] \mapsto \int_M \eta \wedge \zeta. \tag{63}$$

За компактну оријентисану подмногострукост без границе $S \subset M$ димензије k добро је дефинисан интеграл

$$\int_S : H_c^k(M) \to \mathbb{R}, \quad \zeta \mapsto \int_S j^*\zeta, \tag{64}$$

али и интеграл (54), при чему не смета то што форма ζ нема компактан носач, јер се интеграли по компактној подмногострукости S. Одатле следи да је, као у компактном случају, дефинисан Поенкареов дуал, али сада на два начина. Спаривањем интеграла (64) са (62) добијамо Поенкареов дуал $PD(S) \in H^{n-k}(M)$, а спаривањем интеграла (54) са (63) добијамо Поенкареов дуал $PD_c(S) \in H_c^{n-k}(M)$ који припада кохомологији са компактним носачем. Наравно, ова два Поенкареова дуала се разликују (видети [**18**] за детаље). $\diamond$

3.3. Кобордизми. Компактна многострукост без границе назива *затвореном.* Многострукост се назива *отвореном* ако нема ниједну затворену компоненту повезаности. Затвореност компонентни повезаности многострукости димензије n може да се опише у терминима n–те хомолошке групе са коефицијентима у $\mathbb{Z}_2$:

Теорема 20. *Нека је M повезана многострукост димензије n. Тада важи:*

(1) *ако је M затворена, онда је $H_n(M;\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$;*
(2) *ако M није затворена, онда је $H_n(M;\mathbb{Z}_2) = 0$.*

Генератор групе $H_n(M;\mathbb{Z}_2)$ затворене n–димензионе многострукости M назива се њеном *фундаменталном класом* и означава са $[M]$.

Нека је P тополошки простор. Непрекидно пресликавање

$$f : M \to P$$

многострукости M у тополошки простор P индукује пресликавање

$$f_* : H_n(M;\mathbb{Z}_2) \to H_n(P;\mathbb{Z}_2)$$

Норман Стинрод је 1946. године поставио питање да ли свака хомолошка класа може да се реализује помоћу многострукости [**27**]. Прецизније, нека је дата n–та хомолошка $A \in H_n(M;\mathbb{Z}_2)$. Да ли постоје затворене многострукости $M_1, \dots, M_k$ и пресликавања

$$f^1 : M_1 \to P, \dots, f^k : M_k \to P$$

---

[15] $\{U_\alpha\}$ је *добро покривање* многострукости M ако је $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ и ако су сви непразни коначни пресеци $U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k}$ дифеоморфни $\mathbb{R}^n$.

таква да је
$$A = f_*^1[M_1] + \ldots + f_*^k[M_k]?$$
Одговор на ово питање дао је Рене Том [**50**], уводећи при томе појам *кобордизма*. Две затворене многострукости M_0, M_1 исте димензије n су *кобордантне* ако постоји многострукост са границом W димензије $n+1$ чија је граница ∂W дифеоморфна дисјунктној унији $M_0 \sqcup M_1$. Уводимо овај појам прецизнијом дефиницијом.

Дефиниција 27. *Кобордизам* између затворених многострукости M_0 и M_1 исте димензије n је четворка (W, M_0, M_1, j_0, j_1), где је W многострукост димензије $n+1$ са границом ∂W, и
$$j_0 : M_1 \to W, \qquad j_1 : M_1 \to W$$
улагања, таква да је $\partial W = j_0(M_0) \sqcup j_1(M_1)$. Многострукости су *кобордантне* ако постоји кобордизам између њих. $\diamondsuit$

Празан скуп је, по дефиницији, многострукост *сваке* димензије. За многострукост која је кобордантна празном скупу (тј. многострукост која је граница многострукости за један веће димензије) кажемо да је *кобордантна нули*.

Кобордизам је релација еквиваленције на класи многострукости димензије n: $W = M \times [0,1]$ је многострукост са границом $\partial W \cong M \sqcup M$ и обезбеђује рефлексивност, симетричност следи из дефиниције и симетричности дисјунктне уније, а транзитивност из чињенице да лепљењем кобордизма W_0 између M_0 и M_1 и кобордизма W_1 између M_1 и M_2 дуж дела граница дифеоморфних M_1 добијамо кобордизам између M_0 и M_1. Скуп свих класа еквиваленције означава се са $\mathcal{N}_n$.

Дисјунктна унија дефинише на $\mathcal{N}_n$ структуру Абелове групе:
$$+ : ([M],[N]) \in \mathcal{N}_n \to \mathcal{N}_n, \quad [M] + [N] := [M \sqcup N], \qquad 0 := [\emptyset]. \tag{65}$$

Пример 37. Затворене 0–димензионе многострукости су коначни скупови тачака. Пошто 1–димензиона многострукост има паран број тачака на граници, две 0–димензионе многострукости су кобордантне, ако и само ако имају исти број тачака по модулу 2. Следи да је $\mathcal{N}_0 = \mathbb{Z}_2$.

Затворене 1–димензионе многострукости су коначне уније кругова $\mathbb{S}^1$. Свака унија k кругова је граница сфере без k дискова, па је свака затворена 1–димензиона многострукост кобордантна нули, односно $\mathcal{N}_1 = 0$.

Оријентабилне површи могу да се реализују као подмногострукости у $\mathbb{R}^3$, па се лако види да су оне кобордантне нули. Може да се докаже да пројективна раван $\mathbb{R}P^2$ није кобордантна нули и да је свака неоријентабилна површ кобордантна пројективној равни, па је $\mathcal{N}_2 = \mathbb{Z}_2$. $\sharp$

Из рефлексивности релације кобордизма следи да су у Абеловој групи $\mathcal{N}_n$ сви елементи реда 2.

Скуп
$$\mathcal{N}_* := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n$$
има структуру прстена. Уз сабирање (65) које на $\mathcal{N}_*$ дефинише структуру Абелове групе, дефинисано је и множење, помоћу
$$\times : ([M],[N]) : \mathcal{N}_k \times \mathcal{N}_n \to \mathcal{N}_{k+n}, \quad [M] \times [N] := [M \times N]. \tag{66}$$

Другим речима, $(\mathcal{N}_*, +, \times)$ је *градуисани прстен.* Том је доказао следећу теорему:

Теорема 21. *$\mathcal{N}_*$ је прстен полинома $\mathbb{Z}_2[x_2, x_4, x_5, x_6, x_8, \ldots]$ са по једним генератором $x_j \in \mathcal{N}_j$ за свако $j \neq 2^k - 1$.*

Приметимо да резултати из Примера 37 следе из ове теореме. Том је доказао и да за генераторе x_j за парне j могу да се узму пројективни простори $\mathbb{R}P^j$. А. Долд [**26**] је описао генераторе за непарне j.

Дефиниција 28. *Сингуларна подмногострукост* димензије n у простору P је пар (M, f), где је M глатка многострукост димензије n и $f : M \to P$ непрекидно пресликавање. Две сингуларне подмногострукости (M_0, f^0), (M_1, f^1) су *бордантне* ако постоји кобордизам (W, M_0, M_1, j_0, j_1) и непрекидно пресликавање $F : W \to P$ такво да је $F \circ j_0 = f^0$ и $F \circ j_1 = f^1$. $\diamondsuit$

Бордизам сингуларних подмногострукости у P је релација еквиваленције; скуп класа еквиваленције означавамо са $\mathcal{N}_n(P)$. И овај скуп има структуру прстена, дефинисану помоћу (65), (66) и дефиниције пресликавања $f+g$ и $f \times g$ за $(M, f), (N, g) \in \mathcal{N}_*(P)$ на природан начин. Приметимо да је $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_n(\{p\})$ где је $\{p\}$ једночлан скуп.

Напомена 13. Постоји извесна недоследност у примени термина *бордизам* и *кобордизам* у литератури. Р. Том је користио термин *кобордизам*, од француске речи bord за границу, на исти начин на који се користи нпр. *колинеарност* за припадање истој правој линији. Касније се испоставило да је $\mathcal{N}_*(P)$ генералисана *хомолошка* теорија, па је за њу у употреби термин *теорија бордизама*, а за дуалну, кохомолошку теорију *теорија кобордизама.* $\diamond$

Може да се докаже следеће тврђење.

Лема 5. *Ако сингуларне подмногострукости (M_0, f^0), (M_1, f^1) дефинишу исту класу у $\mathcal{N}_n(P)$, онда важи*

$$f^0_*[M_0] = f^1_*[M_1].$$

Одатле следи да је пресликавање

$$\mathcal{N}_n(P) \to H_n(P; \mathbb{Z}_2), \qquad (M, f) \mapsto f_*[M]$$

добро дефинисано. Стинродово питање сада може да се преформулише као питање да ли је ово пресликавање сурјективно.

Аналогно питање може да се постави и за случај коефицијената у $\mathbb{Z}$ уместо у $\mathbb{Z}_2$. У том случају постоји аналогна *теорија оријентисаних (ко)бордизама.* Аналогија Теореме 20 за коефицијенте у $\mathbb{Z}$ је следећа теорема (приметимо да ове две теореме дају прецизнију хомолошку карактеризацију оријентабилности и затворености многострукости од резултата (57) који смо извели на стр. 46).

Теорема 22. *Нека је M повезана многострукост димензије n. Тада важи:*

(1) *ако је M затворена и оријентабилна, онда је $H_n(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$;*
(2) *ако је M затворена и неоријентабилна, онда је $H_n(M; \mathbb{Z}) = 0$;*
(3) *ако M није затворена, онда је $H_n(M; \mathbb{Z}) = 0$.*

Том је у [**50**] дао и одговор на Стинродово питање за случај хомологије са коефицијентима у $\mathbb{Z}$ (који је у том случају сложенији). За тај случај увео је појам оријентисаних кобордизама, у класи оријентисаних многострукости.

Нека је W многострукост димензије $n+1$ са границом. Приметимо да је, на основу Теореме о крагни на стр. 45, могуће дуж границе многострукости изабрати глатко векторско поље X које нигде није једнако нули и припада нормалном раслојењу $\nu(\partial W)$. Ако је $\mu \in \Omega^{n+1}(W)$ форма оријентације на W, границу ∂W можемо да оријентишемо помоћу форме $i_X\mu \in \Omega^n(\partial W)$.

Задатак 34. Нека је M затворена многострукост димензије n са оријентацијом задатом формом $\mu \in \Omega^n(M)$ и $W = M \times [0,1]$ и нека је на W задата оријентација формом $\mu \wedge dt$. Доказати да, без обзира на то каква је оријентација изабрана на W, један од дифеоморфизама

$$j_0 : M \to M \times \{0\}, \quad j_1 : M \to M \times \{1\}, \quad j_0(x) = (x,0), \quad j_1(x) = (x,1)$$

чува, а друго мења оријентацију. ✓

Дефинишимо сада релацију еквиваленције на класи оријентисаних многострукости.

Дефиниција 29. Оријентисане затворене многострукости M_0 и M_1 димензије n су *оријентисано кобордантне* ако постоји оријентисана многострукост са границом W димензије $n+1$, чија је граница ∂W дифеоморфна дисјунктној унијхи $M_0 \times M_1$ тако да дифеоморфизам чува оријентацију. $\diamondsuit$

Скуп класа еквиваленције релације оријентисаног кобордизма дефинисане на многострукостима димензије n означавамо са Ω_n. Као и у случају неоријентисаних кобордизама,

$$\Omega_* := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega_n$$

има структуру прстена.

Ако је M оријентисана многострукост, са $-M$ означавамо многострукост са супротном оријентацијом. Из Задатка 34 следи да су M и $-M$ кобордантне, али не и M и M. Другим речима, елементи Абелове групе $(\Omega_n, +)$ *нису* реда 2 као у случају групе $(\mathcal{N}, +)$. На пример, $\Omega_0 = \mathbb{Z}$. Исто као и код неоријентисаних кобордизама закључујемо да је $\Omega_1 = 0$ и $\Omega_2 = \mathbb{Z}$ (за разлику од $\mathcal{N}_2 = \mathbb{Z}_2$, јер се сада ради само у класи оријентисаних многострукости). Опис прстена Ω_* је компликованији од описа прстена $\mathcal{N}_*$ датог у Теореми 21, али тензорски производ $\Omega_* \times \mathbb{Q}$ је изоморфан прстену полинома са генераторима $x_j = [\mathbb{C}P^{2j}]$.

Задатак 35. Нека су M и N повезане многострукости и $p, q \in N$ регуларне вредности глатког пресликавања $f : M \to N$. Доказати:
(а) $f^{-1}(p)$ и $f^{-1}(q)$ су кобордантне многострукости.
(б) Ако је M компактна и $\dim M = \dim N$, онда је $f^{-1}(p)$ коначан скуп.
(в) Ако је број елемената скупа $f^{-1}(p)$ непаран, онда је $f(M) = N$. ✓

3.4. Степен пресликавања. Нека су M и N повезане затворене многострукости исте димензије. Ако су $q_0, q_1 \in N$ регуларне вредности глатког пресликавања $f : M \to N$, онда су $f^{-1}(q_0)$ и $f^{-1}(q_1)$ многострукости димензије нула, што значи да су (због компактности M) коначни скупови тачака. Из Теореме о трансверзалности следи да постоји пут $\gamma : [0,1] \to N$ који је трансверзалан на f. Инверзна слика $f^{-1}[(\gamma[0,1])$ је многострукост димензије 1 са границом $f^{-1}(q_0) \cup f^{-1}(q_1)$. То значи да су $f^{-1}(q_0)$ и $f^{-1}(q_1)$ скупови исте парности (видети Пример 37), што оправдава следећу дефиницију.

Дефиниција 30. Степен глатког пресликавања $f : M \to N$ по модулу 2, где су M и N затворене многострукости исте димензије, је број тачака скупа $f^{-1}(q)$ по модулу 2, за регуларну вредност $q \in N$. $\Diamond$

Степен пресликавања f по модулу 2 означавамо са $\deg_2 f$. Слично доказу да степен $\deg_2 f$ не зависи од избора регуларне тачке, може да се види да је он хомотопска инваријанта пресликавања f. Ако хомотопију f_t између f_0 и f_1 поставимо у трансверзалан положај према заједничкој критичној тачки q пресликавања f_0 и f_1, скуп $\{(p,t) \mid f(t,p) = q\}$ ће да буде подмногострукост димензије 1 у M, па ће број тачака његове границе бити паран, а управо број тих тачака по модулу 2 је $\deg_2 f_0 + \deg_2 f_1$.

Ако желимо да дефинишемо степен пресликавања у $\mathbb{Z}$ уместо $\mathbb{Z}_2$, поступамо исто као при преласку са неоријентисаних кобордизама на оријентисане - узимамо у обзир оријентацију. Нека су M и N затворене и оријентисане формама оријентације μ_M и μ_N. Пресликавање $f_*(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ је изоморфизам ако је p регуларна тачка, па можемо да дефинишемо број $\mathrm{sgn}(\det) f_*(p) \in \{-1, 1\}$ у зависности од тога да ли $f_*(p)$ слика базу сагласну са оријентацијом μ_M (видети Дефиницију 11 на стр. 17) у базу сасгласну са оријентацијом μ_N или не. Другим речима, ако је $X_1, \ldots, X_n$ база простора T_pM сагласна са оријентацијом на M, $\mathrm{sgn}(\det) f_*(p)$ дефинишемо као знак броја $\mu_N(f_*X_1, \ldots, f_*X_n)$. Лако је видети да је овај број у локалним координатама које чувају оријентацију знак јакобијана пресликавања f у тим координатама.

Дефиниција 31. Степен глатког пресликавања $f : M \to N$, где су M и N затворене оријентисане многострукости исте димензије, је број

$$\deg f := \sum_{p \in f^{-1}(q)} \mathrm{sgn}(\det f_*(p)),$$

где је $q \in N$ регуларна вредност. $\Diamond$

Као и у случају степена по модулу 2, овај број не зависи од избора регуларне вредности (с тим што уместо Примера 37 користимо аргумент из Задатка 34) и представља хомотопску инваријанту пресликавања.

Нека је $q \in N$ регуларна вредност пресликавања $f : M \to N$. Тада је $f^{-1}(q)$ коначан скуп $\{p_1, \ldots, p_k\}$. Из Теореме о инверзној функцији следи да свака тачка p_j има околину V_j која се дифеоморфно слика на околину U тачке q. Претпоставимо да је μ_N форма којом је дефинисана оријентација на N. Из Примера 36 на стр. 46 следи да је

$$\left(\int_M \mu\right)^{-1} \mu = \mathrm{PD}(\{p\})$$

и да кохомолошку класу $\mathrm{PD}(\{p\})$ (а тиме и μ) можемо да представимо формом која је садржана у U. Применом теореме о смени променљиве у интегралу на сваку од околина V_j добијамо формулу

$$\int_M f^*\mu_N = \deg f \int_N \mu_N. \tag{67}$$

Специјално, нека је $M = N$. Из Стоксове теореме следи да форма оријентације μ дефинише нетривијалну класу $[\mu] \in H^{\dim M}_{dR}(M) = \mathbb{R}$ (видети(57) на стр. 46), па из (67) видимо да је

$$f^* : H^{\dim M}_{dR}(M) \to H^{\dim M}_{dR}(M)$$

множење са $\deg f$.

Пример 38. Оријентација на сфери $\mathbb{S}^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \ldots + x_n^1 = 1\}$ дата је n–формом

$$\mu := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x_k \, dx_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

где симбол $\widehat{\ }$ означава да је тај члан изостављен. Из Стоксове теореме лако следи да је $[\mu]$ нетривијална класа у $H^n_{dR}(\mathbb{S}^n)$. За антиподално пресликавање сфере

$$a : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \quad a(x) = -x.$$

важи $a^*\mu = (-1)^{n+1}\mu$, па је $\deg a = (-1)^{n+1}$. ♯

Приметимо да из (67) следи и независност дефиниције степена од избора регуларне вредности, као и то да хомотопски еквивалентна пресликавања имају исти степен:

$$f \simeq g \ \Rightarrow\ \deg f = \deg g. \tag{68}$$

Ово последње нам омогућава да, уз помоћ Теореме 1 на стр. 4, дефинишемо степен *непрекидног* пресликавања, као степен произвољног глатког пресликавања у његовој хомотопској класи.

Следећа теорема, коју наводимо без доказа, издваја специјалан случај у коме у (68) важи еквиваленција.

Теорема 23. (Хопфова) *Нека је M затворена многострукост димензије n. Непрекидна пресликавања*

$$f, g : M \to \mathbb{S}^n$$

су хомотопски еквивалентна ако и само ако имају исти степен.

3.5. Индекс пресека. Степен пресликавања, који броји решења једначине $f(x) = q$ (у $\mathbb{Z}_2$ или у $\mathbb{Z}$ са знаком који зависи од оријентације) може да се уопшти на природан начин. То уопштење је инваријанта која, на сличан начин, броји пресечне тачке подмногострукости.

Нека је M затворена многострукост димензије n, $S \subset M$ затворена подмногострукост димензије $n-k$, R многострукост димензије k и $f : R \to M$ глатко пресликавање. Ако је f трансверзално на S, онда је $f^{-1}(S)$ многострукост димензије нула, односно коначан скуп тачака. Број тих тачака по модулу 2 називамо *индексом пресека* пресликавања f и подмногострукости S. Очигледно је да у случају $S = \{q\}$ добијамо дефиницију степена по модулу 2.

Специјално, ако је S подмногострукост трансверзална на R, индекс пресека инклузије $j : S \hookrightarrow M$ и R називамо индексом пресека подмногострукости и означавамо са $R \cdot S$.

Као и у случају степена, индекс пресека са вредностима у $\mathbb{Z}$ можемо да дефинишемо ако су многострукости R, S и M оријентисане. Тада у свакој тачки $p \in f^{-1}(S)$ изаберемо базу $X_1, \ldots, X_k$ сагласну са оријентацијом у R, а у тачки $f(p) \in S$ базу $Y_1, \ldots, Y_{n-k}$ сагласну са оријентацијом у S. Дефинишемо $\sigma(p) = 1$ ако је база[16] $f_*(p)X_1, \ldots, f_*(p)X_k, Y_1, \ldots, Y_{n-k}$ сагласна са оријентацијом у M и $\sigma(p) = -1$ ако није и индекс пресека као $\sum_{p \in f^{-1}(S)} \sigma(p)$.

[16] Ово јесте база, због услова трансверзалности

Постоји формула која уопштава (67): за сваку затворену подмногострукост $S \subset M$ дефинисана је де Рамова кохомолошка класа $PD(S) \in H_{dR}^{\dim S}(M)$ (Поенкареов дуал подмногострукости S). За сваке две затворене подмногострукости R, S такве да је $\dim R + \dim S = \dim M$ важи

$$R \cdot S = \int_M PD(R) \wedge PD(S). \tag{69}$$

Користећи дефиницију Поенкареовог дуала (69) можемо да напишемо у еквивалентном облику

$$R \cdot S = \int_S PD(R). \tag{70}$$

Приметимо да из Примера 36 на стр. 46 следи да се у случају када је $R = \{q\}$ тачка у M и $\dim S = \dim M$ ове формуле своде на (67).

Из (69), (70) следи да је индекс пресека хомотопска инваријанта. Захваљујући томе можемо, користећи теорему о трансверзалности, да дефинишемо и индекс пресека многострукости R и S које се не секу трансверзално као индекс пресека многострукости R и $j_\varepsilon(S)$, где је j_t хомотопија и $j_\varepsilon(S)$ трансверзална на R. Специјално ако је димензија многострукости M парна и $\dim S = \frac{1}{2} \dim M$ можемо да дефинишемо *индекс самопресека* $S \cdot S$ подмногострукости S.

Нека је M затворена многострукост димензије n и $f : M \to M$ глатко пресликавање. Означимо са $\mathrm{tr}_k\, f^*$ траг линеарног пресликавања

$$f^* : H_{dR}^k(M) \to H_{dR}^k(M).$$

Број

$$L(f) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{tr}_k\, f^*$$

назива се *Лефшецовим бројем* пресликавања f. Наравно, овај број је хомотопска инваријанта пресликавања f.

Пример 39. Нека је $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ глатко пресликавање. У Задатку 11 на стр. 20 смо израчунали кохомологију сфере:

$$H_{dR}^k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k \in \{0, n\} \\ 0, & k \notin \{0, n\}. \end{cases}$$

Из дефиниције степена следи да је $f^* : H_{dR}^n(\mathbb{S}^n) \to H_{dR}^n(\mathbb{S}^n)$ множење са $\deg f$, док из повезаности сфере следи да је $f^* : H_{dR}^0(\mathbb{S}^n) \to H_{dR}^0(\mathbb{S}^n)$ идентичко пресликавање. Одатле видимо да је $L(f) = 1 + (-1)^n \deg f$. ♯

Теорема 24. **(Лефшецова теорема о фиксним тачкама)** *Нека је*

$$\Delta := \{(x, x) \mid x \in M\}$$

дијагонала у $M \times M$ *и нека је*

$$\Gamma(f) := \{(p, f(p)) \in M \times M \mid p \in M\}$$

график глатког пресликавања $f : M \to M$. *Тада је индекс пресека подмногострукости* Δ *и* $\Gamma(f)$ *у* $M \times M$ *једнак Лефшецовом броју пресликавања* f*:*

$$\Delta \cdot \Gamma(f) = L(f)$$

Специјално, ако је $L(f) \neq 0$, *пресликавање* f *има бар једну фиксну тачку.*

Задатак 36. Доказати да глатко пресликавање $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ које није сурјективно има фиксну тачку. ✓

Пример 40. Из Примера 39 следи да глатко пресликавање $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ такво да је $\deg f \neq (-1)^{n+1}$ фиксну тачку. Пример 38 на стр. 53 показује да пресликавање степена $(-1)^{n+1}$ не мора да има фиксну тачку. ♯

Задатак 37. Доказати да глатко пресликавање $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$ или има фиксну тачку, или постоји тачка x таква да је $f(x) = -x$. Извести одатле закључак да свако пресликавање $g : \mathbb{R}P^{2n} \to \mathbb{R}P^{2n}$ има фиксну тачку. Показати да постоји пресликавање $h : \mathbb{R}P^{2n+1} \to \mathbb{R}P^{2n+1}$ без фиксне тачке. ✓

Пошто хомотопски еквивалентна пресликавања индукују исто пресликавање у кохомологији, важи следећа импликација:

$$f \simeq \mathrm{id}_M \ \Rightarrow \ L(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim\ H^k_{dR}(M). \tag{71}$$

Број

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim\ H^k_{dR}(M) \tag{72}$$

је хомотопска инваријанта многострукости M; назива се њеном *Ојлеровом карактеристиком.*

ГЛАВА 1

Раслојења, конексије, кривине

Раслојење је формализација интуитивног појма фамилије тополошких простора параметризоване тачкама другог тополошког простора. Најједноставнији пример такве фамилије је Декартов производ $T \times F$, где скуп T можемо да сматрамо скупом параметара. На пример, цилиндар $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ може да се посматра као фамилија правих $\mathbb{R}$, параметризована тачкама круга $\mathbb{S}^1$. Мебијусова трака је још један пример фамилије правих параметризоване тачкама круга, која се, тополошки, глобално разликује од цилиндра, али локално не: свака тачка $\theta \in \mathbb{S}^1$ има околину $I_\theta \subset \mathbb{S}^1$, такву да је фамилија правих, параметризована тачкама те околине, хомеоморфна Декартовом производу $I_\theta \times \mathbb{R}$, било да се ради о цилиндру или Мебијусовој траци.

Уопштење овог примера, раслојење, је уређена четворка (X, B, F, π), где су X, B, F тополошки простори, а $\pi : X \to B$ непрекидно пресликавање, такво да за сваку тачку $x \in X$ постоји околина $U \subset B$ тачке $\pi(x) \in B$, таква да је $\pi^{-1}(U)$ хомеоморфно производу $U \times F$ и то тако, да постоји такав хомеоморфизам $\psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times F$, да је композиција $\pi \circ \psi_U^{-1}$ пројекција на прву компоненту.

Важан пример раслојења је *наткривање* – раслојење код кога је F дискретан скуп (у дискретној топологији свака тачка је отворен, па тиме и затворен, скуп). Нпр, $(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1, \mathbb{Z}, \pi)$, где је $\pi(x) = e^{ix}$ је наткривање круга правом; круг може да се схвати и као количник $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ групе $(\mathbb{R}, +)$ и њене подгрупе $(\mathbb{Z}, +)$, а пресликавање $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ као количничко пресликавање. Ако утопимо групу $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ као подгрупу у $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ помоћу хомоморфизама $f_1(m, n) = (m, n)$, $f_2(m, n) = (m, -n)$, $f_3(m, n) = (-m, -n)$, количнички простори $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/f_i(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ дају три, тополошки различита, наткривања – торус, Клајнову флашу и пројективну раван. Реални пројективни простор $\mathbb{R}P^n$ је скуп класа еквиваленције $x \sim -x$ на $\mathbb{S}^n$. Тиме је дефинисано наткривање $(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2, \pi)$ са канонском пројекцијом $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2/_\sim$. Комплексни пројективни простор $\mathbb{C}P^n$ је раслојење $(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathbb{C}P^n, \mathbb{S}^1, \pi)$.

Као што видимо, ови појмови могу да се дефинишу и разматрају у тополошкој категорији. Међутим, у тој категорији не може да се одговори на нека, природна, питања. На пример, потпросторе $\{t_0\} \times S$ и $\{t_1\} \times S$ можемо да сматрамо паралелним у тривијалном раслојењу $T \times S$. То нам омогућава да уведемо појам паралелног померања, сличан паралелној транслацији у еуклидским просторима. Међутим, шта је паралелност у раслојењу које није Декартов производ?

Појам паралелности, који је толико важан у геометрији еуклидских простора, уопштићемо ширу категорију простора помоћу диференцијалног рачуна на раслојењима. А пошто ћемо се бавити диференцирањем, радићемо у глаткој категорији. Под термином „глатко” подразумеваћемо „класе C^∞”.

1. Векторска раслојења

1.1. Дефиниције и примери. Векторска раслојења су раслојења која имају додатну, линеарну, структуру. Прецизније, њих уводимо следећом дефиницијом.

Дефиниција 1. Нека је M глатка многострукост. *Глатко векторско раслојење* E над *базом* M је фамилија $\{E_p\}_{p\in M}$ векторских простора над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, таква да

(1) скуп
$$E = \bigcup_{p\in M} E_p$$
има структуру многострукости;

(2) пројекција
$$\pi : E \to M, \qquad \pi(e) := p \text{ за } e \in E_p$$
је глатка;

(3) за сваку тачку $p_0 \in M$ постоји отворен скуп $U \subset M$ такав да је $p_0 \in U$ и дифеоморфизам
$$\psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{K}^r$$
такав да је за свако $p \in U$ рестрикција
$$\psi_U : E_p = \pi^{-1}(p) \to \{p\} \times \mathbb{K}^r$$
линеарни изоморфизам векторских простора.

Приметимо да је E многострукост димензије $r + \dim M$. Пресликавање ψ_U назива се *локалном тривијализацијом*, простор E_p *слојем* или *влакном* над тачком p, а број $r = \dim E_p$ *рангом* раслојења E. Раслојење ранга 1 називамо *линијским раслојењем.*

Ако су E и F раслојења над истом базом M и при томе $F_p \subset E_p$ за свако $p \in M$, кажемо да је F *подраслојење* раслојења E.

Ако је $A \subset M$, скуп $\pi^{-1}(A)$ означавамо са E_A и називамо *рестрикцијом* раслојења E на скуп A. $\Diamond$

Користећи ознаку из претходне дефиниције, локалну тривијализацију можемо да напишемо у облику
$$\psi_U : E_U \to U \times \mathbb{K}^r.$$

Када баш желимо да будемо прецизни, под раслојењем подразумевамо уређену тројку (E, M, π) (или четворку $(E, M, \mathbb{K}^r, \pi)$), а саму многострукост E онда називамо *тоталним простором* раслојења. Некада раслојење означавамо дијаграмом
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^r & \to & E \\ & & \downarrow \\ & & M. \end{array}$$

Пример 1. Производ $E = M \times \mathbb{K}^r$ и канонска пројекција π на прву компоненту дефинишу векторско раслојење. $\sharp$

Пример 2. *Тангентно раслојење*

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$$

је унија свих тангентних простора многострукости M. $\sharp$

Пример 3. *Дистрибуција* Δ тангентних вектора на M, о којој је било речи у Фробенијусовој теореми, је подраслојење тангентног раслојења TM. $\sharp$

Пример 4. Нека је $\mathbb{K}P^n$ пројективни простор димензије n над пољем $\mathbb{K}$, тј. скуп свих правих у простору $\mathbb{K}^{n+1}$ које пролазе кроз координатни почетак. *Таутолошко раслојење* над $\mathbb{K}P^n$ је линијско раслојење

$$\gamma_n^1(\mathbb{K}) := \{(l, x) \in \mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^{n+1} \mid x \in l\}. \tag{1}$$

Пројекција $\pi : \gamma_n^1 \to \mathbb{K}P^n$ је дефинисана са $\pi(l, x) = l$. Слој над тачком $l \in \mathbb{K}P^n$ је права $l \subset \mathbb{K}^{n+1}$.

Горњи индекс 1 у γ_n^1 стоји због тога што постоји уопштење ове конструкције. Наиме, скуп свих k–димензионих потпростора у $\mathbb{K}^n$ се назива *Грасманијаном* или *Грасмановом многострукошћу* и означава са $G_k(\mathbb{K}^n)$. Очигледно је да је $\mathbb{K}P^n = G_1(\mathbb{K}^{n+1})$. По аналогији са (1) дефинише се таутолошко раслојење γ_n^k над базом $G_k(\mathbb{K}^n)$.

Приметимо да група $O(n)$ ортогоналних $n \times n$ матрица дејствује транзитивно на скупу k–димензионих потпростора у $\mathbb{R}^n$, са стабилизатором $O(k) \times O(n-k)$, па је

$$G_k(\mathbb{R}^n) \cong O(n)/(O(k) \times O(n-k)), \tag{2}$$

што је један начин да се зада структура глатке многострукости на Грасманијану (и специјално, пројективном простору), захтевом да канонска пројекција

$$O(n) \to G_k(\mathbb{R}^n) \cong O(n)/(O(k) \times O(n-k))$$

и природно дејство $O(n) \times O(n)/(O(k) \times O(n-k)) \to O(n)/(O(k) \times O(n-k))$ дефинисано множењем матрица буду глатка пресликавања (видети Теорему 15 на стр. 28). Слично,

$$G_k(\mathbb{C}^n) \cong U(n)/(U(k) \times U(n-k)),$$

где је $U(n)$ група унитарних $n \times n$ матрица. Уколико у (2) групу ортогоналних матрица заменимо групом $SO(n)$ ортогоналних матрица које чувају оријентацију, добијамо дефиницију *оријентисаних Грасманијана*

$$G_k^+(\mathbb{R}^n) \cong SO(n)/(SO(k) \times SO(n-k)).$$

Специјално, $G_1^+(\mathbb{R}^{n+1}) \cong \mathbb{S}^n$, док је $G_1(\mathbb{R}^{n+1}) \cong \mathbb{R}P^n$. $\sharp$

Задатак 1. Доказати да је $\gamma_1^1(\mathbb{R})$ Мебијусова трака. ✓

Дефиниција 2. *Морфизам раслојења* (E_1, M_1, π_1) и (E_2, M_2, π_2) је пар глатких пресликавања

$$\tilde{f} : E_1 \to E_2, \qquad f : M_1 \to M_2,$$

таквих да је

(1) $f \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \tilde{f}$, односно дијаграм

$$\begin{array}{cccc} \tilde{f}: & E_1 & \to & E_2 \\ & \downarrow & & \downarrow \\ f: & M_1 & \to & M_2 \end{array}$$

комутира;

(2) за свако $p \in M_1$ рестрикција

$$\tilde{f} : \pi_1^{-1}(p) \to \pi_2^{-1}(f(p))$$

је линеарно пресликавање векторских простора.

Морфизам раслојења који је уз то и дифеоморфизам називамо *изоморфизмом* векторских раслојења. Векторско раслојење које је изоморфно Декартовом производу базе и слоја, тј. раслојењу из Примера 1 називамо *тривијалним раслојењем.* Тривијално раслојење обично означавамо са ϵ, или, ако хоћемо да нагласимо његов ранг, са ϵ^r. $\Diamond$

Дефиниција 3. *Сечење* векторског раслојења (E, M, π) је глатко пресликавање $s : M \to E$ за које важи

$$\pi \circ s = \mathrm{id}_M.$$

Другим речима, $\pi \circ s(p) = p$ за свако $p \in M$ или, еквивалентно, $s(p) \in E_p$. Скуп свих сечења на раслојењу E означавамо са $\Gamma(E)$.

Специјално, сечење $s_0(p) = 0_p$, где је 0_p нула векторског простора E_p, називамо *нултим сечењем* раслојења E. Његову слику $s_0(M)$ означавамо са 0_M или 0_E и некада и саму ту слику називамо нултим сечењем. Лако је видети да је 0_M дифеоморфно са M, па често ове две многострукости идентификујемо и саму базу M називамо нултим сечењем. $\Diamond$

Пример 5. Глатка векторска поља на многострукости M су сечења тангентног раслојења TM.

Пример 6. Тривијално раслојење ранга r има r сечења

$$s_1, \ldots, s_r : M \to E \cong M \times \mathbb{K}^r$$

таквих да су вектори $s_1(p), \ldots, s_r(p)$ линеарно независни у свакој тачки $p \in M$, нпр. сечења $s_j(p) = (\{p\}, e_j)$, где је $\{e_j\}_{1 \le j \le r}$ стандардна (или било која) база простора $\mathbb{K}^r$.

Обрнуто, ако векторско раслојење ранга r има r сечења $s_1, \ldots, s_r$ која су линеарно независна у свакој тачки, онда је оно тривијално; пресликавање

$$M \times \mathbb{K}^r \to E, \qquad (p, a_1, \ldots, a_r) \mapsto a_1 s_1(p) + \cdots + a_r s_r(p)$$

дефинише изоморфизам векторских раслојења. $\sharp$

Задатак 2. Доказати да Мебијусова трака $\gamma_1^1(\mathbb{R})$ није изоморфна тривијалном раслојењу, цилиндру $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Упутство: доказати да је комплемент нултог сечења цилиндра неповезан, а Мебијусове траке повезан скуп. $\checkmark$

Пример 7. Свако сечење тангентног раслојења $T\mathbb{S}^{2n}$ сфере *парне димензије* $2n$ (тј. свако глатко векторско поље на таквој сфери) је једнако нули у бар једној тачки сфере. Заиста, ако би у свакој тачки $p \in \mathbb{S}^{2n}$ постојао вектор $\mathbf{v}(p) \in T_p\mathbb{S}^{2n}$ различит од нуле, а пресликавање $p \mapsto \mathbf{v}(p)$ при томе било глатко (или чак непрекидно), онда би

$$H(x, t) := \cos{(\pi t)}\mathbf{r}(x) + \sin{(\pi t)}\mathbf{v}(x),$$

где је $\mathbf{r} := \overrightarrow{0x}$ радијус вектор тачке x, дефинисало хомотопију између идентичког и антиподалног ($a(x) = -x$) пресликавања сфере (приметимо да H заиста има вредности на сфери, због $\mathbf{r} \perp \mathbf{v}$ и Питагорине теореме). Међутим, ово је немогуће, јер антиподално пресликавање сфере парне димензије мења оријентацију (Пример 38 на стр. 53), а хомотопски еквивалентна пресликавања индукују исту оријентацију (или исто пресликавање у највишој де Рамовој кохомологији).

На сфери $\mathbb{S}^{2n-1}$ непарне димензије лако се конструише глатко векторско поље које није нигде једнако нули: $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, па је у амбијентном простору присутна комплексна структура $i = \sqrt{-1}$. Пошто је $i\mathbf{r} \perp \mathbf{r}$, пресликавање

$$\mathbb{S}^{2n-1} \to T\mathbb{S}^{2n-1}, \qquad x \mapsto i\mathbf{r}(x),$$

где је $\mathbf{r}(x) = \overrightarrow{0x}$, дефинише глатко векторско поље на сфери.

Приметимо да у случају $\mathbb{S}^1$ то значи да је тангентно раслојење круга тривијално. Пошто је $\mathbb{S}^3$ смештено у простору $\mathbb{R}^4$, у коме имамо три независне комплексне структуре $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (захваљујући кватернионској структури), на сфери $\mathbb{S}^3$ можемо да коснтруишемо три линеарно независна глатка тангентна векторска поља. На основу Примера 6 значи да је тангентно раслојење $T\mathbb{S}^3$ тривијално. Слично важи за сферу $\mathbb{S}^7$, због октанионске структуре у $\mathbb{R}^8$. Познато је да су ово једине сфере чије је тангентно раслојење тривијално. Многострукости са тривијалним тангентним раслојењем називамо *паралелизабилним*. $\sharp$

Пример 8. Торус $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ је паралелизабилна многострукост, јер је

$$T\mathbb{T}^n \cong T\mathbb{S}^1 \times \cdots \times T\mathbb{S}^1,$$

а тангентно раслојење $T\mathbb{S}^1$ је тривијално. Тако видимо да је $T\mathbb{T}^n \cong \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$. $\sharp$

Теорема о трансверзалности о којој смо говорили у Глави 0 има следеће важно уопштење.

Теорема 1. *Нека је E векторско раслојење над M и $f : R \to E$ глатко пресликавање. Тада постоји сечење $s : M \to E$ које је трансверзално на f.*

Дефиниција 4. Нека је (E, M, π_M) векторско раслојење, N глатка многострукост и $f : N \to M$ глатко пресликавање. *Повлачење* раслојења E на N помоћу пресликавања f је раслојење над N, које означавамо са f^*E, дефинисано са

$$f^*E := \{(p, e) \in N \times E \mid f(p) = \pi(e)\},$$

са структуром многострукости наслеђеном од E и N и пројекцијом на прву координату. Другим речима, f^*E је раслојење над N, такво да је $(f^*E)_p = E_{f(p)}$ за свако $p \in N$ и, ако је

$$\psi_U : E_U \to U \times \mathbb{K}^r$$

локална тривијализација раслојења E у околини тачке $f(p)$, онда је

$$f^*\psi_U : f^*E_{f^{-1}(U)} \to f^{-1}(U) \times \mathbb{K}^r$$

(где је, као и обично, $f^*\psi = \psi \circ f$) локална тривијализација раслојења f^*E у околини тачке p. $\diamondsuit$

У терминима повлачења, рестрикција раслојења E на подскуп $A \subset M$ може да се схвати као повлачење j_A^*E помоћу инклузије $j_A : A \hookrightarrow M$.

Дефиниција 5. Коваријантни функтор F на категорији коначно димензионих векторских простора назива се *глатким* ако је

$$F : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(F(V), F(W))$$

глатко пресликавање. Слично се дефинише и глатки контраваријантни функтор. $\diamondsuit$

Приметимо да је скуп морфизама $\mathrm{Hom}(\cdot, \cdot)$ у категорији коначно димензионих векторских простора – скуп матрица, дакле глатка многострукост, па појам глаткости у претходној дефиницији има смисла. Ова дефиниција може да се уопшти и на функторе више промењљивих, захтевом да

$$F : \mathrm{Hom}(V_1, W_1) \times \cdots \times \mathrm{Hom}(V_k, W_k) \to \mathrm{Hom}(F(V_1, \dots, V_k), F(W_1, \dots, W_k))$$

буде глатко пресликавање.

Пример 9. $V \mapsto V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ је глатки функтор. Општије, $(V_1, V_2) \mapsto \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ је глатки функтор две промењљиве. Директна сума $(V_1, V_2) \mapsto V_1 \oplus V_2$, тензорски производ $(V_1, V_2) \mapsto V_1 \otimes V_2$ су глатки функтори две промењљиве. Антисиметрични производ[1] $\bigwedge^s V$ је глатки функтор. Количнички простор $(V, W) \mapsto V/W$ је глатки функтор две промењљиве дефинисан на паровима простора (V, W), где је $W \subset V$. $\sharp$

Глатки функтори нам омогућују да, полазећи од једног векторског раслојења конструишемо нова. Нпр, ако је E векторско раслојење над базом M и F глатки функтор, онда је $F(E)$ раслојење над истом базом, са влакнима $F(E)_p = F(E_p)$. Тривијализације новодобијеног раслојења добијају се од тривијализација старог, применом функтора F на хомоморфизме по влакнима. Глаткост функтора F обезбеђује глаткост добијених тривијализација. Тако добијамо раслојења

$$E_1 \oplus E_2, \quad E_1 \otimes E_2, \quad E^*, \quad \wedge^k E, \quad E_1/E_2$$

и сл. Ако је E раслојење ранга r, $\bigwedge^r E$ је линијско раслојење које се назива *детерминантним раслојењем* раслојења E и означава са $\det E$. Многострукост M је оријентабилна ако и само ако је $\det TM$ тривијално раслојење.

Ако је E раслојење и $E_0 \subset E$ његово подраслојење, онда количник E/E_0 дефинише раслојење E_1, такво да је $E = E_0 \oplus E_1$. Специјално, ако је M глатка многострукост и $N \subset M$ њена подмногострукост, раслојење $(\nu N, N, \pi)$, такво да је

$$T_N M = TN \oplus \nu N$$

(где је $T_N M$ рестрикција раслојења TM на N) је *нормално раслојење* подмногострукости N. Општије, ако је $f : N \to M$ *имерзија*[2], онда је са

$$f^* TM \cong TN \oplus \nu_f$$

дефинисано раслојење ν_f над базом N, које се назива *нормалним раслојењем имерзије* f.

[1] тј. количнички простор тензорског производа $\bigotimes^k V$ по релацији еквиваленције која множење прави антисиметричним

[2] Пресликавање $f : N \to M$ је имерзија ако је његов извод $f_*(p) : T_p N \to T_{f(p)} M$ 1-1 за свако $p \in N$. Имерзија која је хомеоморфизам многострукости N и $f(N)$ (у релативној топологији подскупа у M) назива се *улагањем*.

Задатак 3. *Конормално раслојење* подмногострукости $N \subset M$ се дефинише са

$$\nu^* N := \{\lambda \in T^*_N M \mid \lambda(TN) = \{0\}\}.$$

Доказати да је $T^*_N M \cong T^* N \oplus \nu^* N$. ✓

Задатак 4. Нека је E линијско раслојење. Доказати да је раслојење $E \otimes E^*$ тривијално. Упутство: $E \otimes E^* \cong \mathrm{Hom}(E, E)$, а ово раслојење има сечење које нигде није нула: id_E. ✓

Пример 10. У Примеру 4 смо дефинисали раслојење $\gamma^1_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$. Нека је

$$\gamma^\perp := \{(l, x) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \perp l\}$$

ортогонални комплемент раслојења $\gamma^1_n(\mathbb{R})$ у тривијалном раслојењу $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$. Тада је

$$T(\mathbb{R}P^n) \cong \mathrm{Hom}(\gamma^1_n, \gamma^\perp).$$

Да бисмо ово видели, посматрајмо пројекцију $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$. Њен извод је сурјекција $\pi_* : T\mathbb{S}^n \to T(\mathbb{R}P^n)$, па је $T(\mathbb{R}P^n) \cong T\mathbb{S}^n/_\sim$, где је $X_p \sim -X_{-p}$. За $X_l = [X_p] \in T_l(\mathbb{R}P^n)$ дефинишимо линеарно пресликавање

$$l \mapsto l^\perp, \qquad p \mapsto X_p. \tag{3}$$

Овиме је добро дефинисано линеарно пресликавање, јер је (3) сагласно са

$$-p \mapsto -X_{-p},$$

због $[X_p] = [-X_{-p}]$. ♯

Пример 11. Нека је ϵ^1 тривијално линијско раслојење над $\mathbb{R}P^n$. Из Примера 10 следи да је

$$T(\mathbb{R}P^n) \oplus \epsilon^1 \cong \underbrace{\gamma^1_n \oplus \cdots \oplus \gamma^1_n}_{(n+1)\times}. \tag{4}$$

Заиста, пошто је $\mathrm{Hom}\,(\gamma^1_n, \gamma^1_n) \cong \epsilon^1$, важи

$$T(\mathbb{R}P^n) \oplus \epsilon^1 \cong \mathrm{Hom}(\gamma^n_1, \gamma^\perp) \oplus \mathrm{Hom}\,(\gamma^1_n, \gamma^1_n) \cong \mathrm{Hom}\,(\gamma^1_n, \gamma^\perp \oplus \gamma^1_n) \cong \mathrm{Hom}\,(\gamma^1_n, \epsilon^{n+1}).$$

Пошто је $\mathrm{Hom}\,(\gamma^1_n, \epsilon^{n+1}) \cong \mathrm{Hom}\,(\gamma^1_n, \epsilon^1)^{\oplus(n+1)} \cong (\gamma^1_n)^{\oplus(n+1)}$, одатле следи (4). ♯

Дефиниција 6. Векторско раслојење E над базом M је *стабилно тривијално* ако постоји тривијално раслојење ϵ над базом M такво да је $E \oplus \epsilon$ тривијално раслојење. Раслојења E_1 и E_2 над базом M су *стабилно изоморфна* ако постоје тривијална раслојења ϵ_1 и ϵ_2 над базом M, таква да су $E_1 \oplus \epsilon_1$ и $E_2 \oplus \epsilon_2$ изоморфна раслојења. Многострукост M је *стабилно паралелизабилна* ако је њено тангентно раслојење стабилно тривијално. ♢

Задатак 5. Доказати да је сфера $\mathbb{S}^n$ стабилно паралелизабилна. ✓

Дефиниција 7. Векторско раслојење E над базом M је *оријентабилно* ако постоји отворено покривање $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ многострукости M и локалне тривијализације

$$\psi_\lambda : \pi^{-1}(U_\lambda) \to U_\lambda \times \mathbb{K}^r,$$

такве да за све $\alpha, \beta \in \Lambda$ и $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ линеарно пресликавање

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(p, \cdot) : \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^r,$$

чува оријентацију. ♢

Задатак 6. Доказати да је многострукост M оријентабилна ако и само ако је њено тангентно раслојење TM оријентабилно раслојење. ✓

Пример 12. Тангентно раслојење TM произвољне многострукости је оријентабилна многострукост: локална тривијализација ψ многострукости M дефинише локалну тривијализацију $\psi \times \psi_*$ многострукости TM, чији је диференцијал $\psi_* \times \psi_*$; без обзира да ли ψ_* чува или мења оријентацију, „квадрат" $\psi_* \times \psi_*$ је чува, јер је квадрат Јакобијана дифеоморфизма увек позитиван. Дакле, многострукост TM је увек оријентабилна многострукост, али раслојење TM је, на основу Задатка 6, оријентабилно раслојење ако и само ако је M оријентабилна многострукост. ♯

Задатак 7. Доказати да је линијско раслојење оријентабилно ако и само ако је тривијално. ✓

Задатак 8. Доказати да Мебијусова трака није ни оријентабилно раслојење ни оријентабилна многострукост. Извести закључак (из чињенице да пројективна раван садржи Мебијусову траку) да пројективна раван није оријентабилна многострукост. ✓

Задатак 9. Нека је M оријентабилна многострукост. Доказати да је подмногострукост $N \subset M$ оријентабилна, ако и само ако је нормално раслојење νN оријентабилно. Закључити, применом Задатка 7, да је хиперповрш у оријентабилној многострукости оријентабилна ако и само на њој постоји непрекидно нормално векторско поље, које нигде није једнако нули. Последње тврђење се често користи у почетним курсевима Анализе да се у специјалном случају $M = \mathbb{R}^3$ на лак начин дефинише оријентација површи као задавање поља јединичних нормалних вектора. ✓

Теорема 2. *Ако су $h_0, h_1 : N \to M$ хомотопна пресликавања и E векторско раслојење над M, онда су векторска раслојења h_0^*E и h_1^*E над N изоморфна.*

△ Скица доказа: нека је $I = [0, 1]$ јединични интервал.

1. КОРАК: свако векторско раслојење (E, I, π) је тривијално. Доказ: поделимо I на интервале $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ на којима се E тривијализује и на сваком од тих интервала изаберемо $r = \operatorname{rang} E$ линеарно независних сечења $s_1^j, \ldots, s_r^j$ тако да се она поклапају на крајевима ($s_k^j(t_{j+1}) = s_k^{j+1}(t_{j+1})$). Тиме смо конструисали r линеарно независних сечења на E.

2. КОРАК: ако је $(E, M \times I, \pi)$ раслојење над $M \times I$, онда су рестрикције $E_{M\times\{0\}}$ и $E_{M\times\{1\}}$, схваћене као раслојења над M, изоморфна раслојења. Ово је технички најсложенији део доказа; овде дајемо само основну идеју. Нека је

$$f : M \times I \to M \times I, \qquad f(p, t) = (p, 1).$$

Може да се докаже да постоји локално коначно отворено покривање $\{U_\lambda\}$ многострукости M, такво да се E тривијализује над $U_\lambda \times I$, као у 1. кораку. Коришћењем те чињенице, може да се конструише подизање $\tilde{f} : E \to E$ пресликавања f, које је линеарни морфизам на сваком слоју E_p. Његова рестрикција $E_{M\times\{0\}} \to E_{)M\times\{1\}}$ је тражени изоморфизам.

3. КОРАК: нека је

$$H : N \times I \to M, \qquad H(p, i) = h_i(p) \ \text{ за } \ i \in \{0, 1\}$$

хомотопија. Доказ тврђења следи применом 2. корака на раслојење H^*E. ▽

Последица 1. *Свако векторско раслојење над контрактибилним простором је тривијално.*

1.2. Томова и Ојлерова класа. Нека је M затворена оријентабилна многострукост димензије n и

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^r & \to & E \\ & & \pi \downarrow \\ & & M. \end{array}$$

оријентабилно реално векторско раслојење ранга r над њом. Претпоставимо и да је Поенкареов дуал нултог сечења $0_E \cong M$ је кохомолошка класа

$$\tau \in H^r_c(M),$$

коју називамо *Томовом класом* раслојења E. Другим речима

$$\int_M \eta = \int_E \eta \wedge \tau \quad \text{за све} \quad \eta \in H^n(E) \tag{5}$$

Може да се покаже да је пресликавање

$$T : H^k(M) \to H^{k+r}_c(M), \quad T(\eta) := \pi^*\eta \wedge \tau \tag{6}$$

изоморфизам. Називамо га *Томовим изоморфизмом.*

Пошто влакна векторског раслојења имају структуру векторског простора која се чува при промени координата, свака два сечења $s_0, s_1 : M \to E$ су хомотопски еквивалентна. Одатле следи да кохомолошка класа

$$e := s^*\tau \in H^r(M)$$

не зависи од избора сечења $s : M \to E$. Ову класу називамо *Ојлеровом класом* раслојења E.

Ако је $r = n$, добро је дефинисан интеграл класе e по M; број

$$\chi(E) := \int_M e$$

називамо *Ојлеровом карактеристиком* раслојења E. Из (70) на стр. 54 следи да је $\chi(E)$ индекс самопресека нултог сечења раслојења E, тј.

$$\chi(E) = 0_E \cdot 0_E. \tag{7}$$

Одатле видимо да произвољно сечење раслојења E има бар $|\chi(E)|$ нула.

Специјално, ако је $E = TM$ тангентно раслојење, уместо $\chi(TM)$ пишемо $\chi(M)$; свако векторско поље на M има бар $|\chi(M)|$ нула. Број $\chi(M)$ називамо *Ојлеровом карактеристиком многострукости* M. Ова дефиниција је еквивалентна дефиницији коју смо дали у (72) на стр. 55, што може да се види на следећи начин.

Нека је X глатко векторско поље на M и нека је ϕ_t његов ток, тј. једнопараметарска фамилија дифеоморфизама генерисана њиме. Другим речима, ϕ_t је решење диференцијалне једначине

$$\frac{d\phi_t}{dt}(p) = X_{\phi_t(p)}, \qquad \phi_0 = \mathrm{id}_M. \tag{8}$$

Из јединствености решења диференцијалне једначине следи да су нуле векторског поља X фиксне тачке пресликавања ϕ_1, јер је решење једначине (8) кроз тачку p у којој је $X_p = 0$ константно. Обрнуто не мора да важи: фиксна тачка пресликавања ϕ_1 не мора да буде нула векторског поља X, него може да лежи на нетривијалној периодичној орбити тока тог поља. Међутим, ако ток векторског поља нема нетривијалних периодичних орбита, онда важи и обрнуто. Векторска поља чији ток нема периодичних орбита увек постоје – нпр. градијентно векторско поље $X = \nabla f$ нема нетривијалних периодичних орбита. Пошто је ϕ_t хомотопија између id_M и ϕ_1, Лефшецов број пресликавања ϕ_1 је

$$L(\phi_1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H^k_{dR}(M)$$

(видети (71) на стр. 55). Пошто се Лефшецов број добија бројањем (рачунајући знак) фиксних тачака пресликавања, а Ојлерова карактеристика бројањем (рачунајући знак) нула векторског поља, уз мало бриге око оријентације закључујемо да је

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H^k_{dR}(M). \tag{9}$$

Пример 13. Резултат Задатка 11 на стр. 20 је

$$H^k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{за } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{за } k \notin \{0, n\}, \end{cases}$$

па из (9) следи

$$\chi(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} 2 & \text{ако је } n \text{ паран број} \\ 0 & \text{ако је } n \text{ непаран.} \end{cases}$$

Одатле добијамо још један доказ да свако тангентно векторско поље на сфери парне димензије има бар једну нулу (Пример 7 на стр. 60). $\sharp$

Пример 14. Нека је M затворена многострукост, f глатко пресликавање хомотопно идентичком и $L(f)$ његов Лефшецов број. Из Лефшецове теореме о фиксним тачкама (стр. 54) следи да је $L(f) = \chi(M)$. Специјално, пресликавање које је хомотопно идентичком има бар $|\chi(M)|$ фиксних тачака.

Одатле видимо да антиподално пресликавање $a(x) = -x$ сфере парне димензије није хомотопно идентичком, јер је $\chi(\mathbb{S}^{2n}) = 2$, а пресликавање a нема фиксних тачака.

У Примеру 7 на стр. 60 смо видели да на сфери непарне димензије постоји векторско поље које нигде није нула. Интеграцијом тог векторског поља добијамо једнопараметарску групу дифеоморфизама; један од њих је антиподално пресликавања. Дакле, у случају сфере непарне димензије, антиподално пресликавање је хомотопно идентичком. $\sharp$

Задатак 10. Извести закључке о антиподалним пресликавањима сфере из претходног примера као последицу Хопфове теореме (стр. 53). ✓

Напомена 1. Да бисмо дефинисали Томову класу помоћу Поенкареовог дуала, потребна је оријентабилност. Томова класа (а тиме и Ојлерова класа и Ојлерова карактеристика) може да се дефинише за оријентабилно раслојење над произвољном затвореном (не обавезно оријентабилном) многострукошћу M, као јединствена класа $\tau \in H^r_c(E)$ чија је рестрикција на свако влакно $\pi^{-1}(p)$ дефинише класу у де Рамовој кохомологији

$$H^r_c(\pi^{-1}(p)) = H^r_c(\mathbb{R}^r) = \mathbb{R}$$

(коју смо израчунали на стр. 47) чији је интеграл по $\mathbb{R}^r$ једнак 1. Изоморфизам (6) важи и у овом случају.

Може да се изостави и претпоставка о компактности многострукости M, али тада је потребно кохомологију са компактним носачем $H^r_c(E)$ заменити кохомологијом са компактним носачем у *вертикалном правцу* $H^r_{cv}(E)$. У том случају у (6) на десној страни стоји $H^r_{cv}(E)$ (детаљи могу да се виде у [**18**]). $\diamond$

Још једна последица присуства векторске структуре на влакнима је то да је на E дефинисано множење скаларом. За $t \in \mathbb{R}$ и $\xi \in E$ у локалним координатама $\xi = (x, v)$ дефинишемо $t \cdot \xi := (x, tv)$; пошто се векторска структура чува при промени координата, тиме је добро дефинисано пресликавање

$$m_t : E \mapsto E, \quad (t, \xi) \mapsto t \cdot \xi.$$

Лако се види да је $m_0(E) = 0_M$ и да је m_t дифеоморфизам за свако $t \neq 0$. За сваки компактан скуп $K \subset E$ и сваку отворену околину $U \subset E$ нултог сечења постоји $\varepsilon \in]0, 1[$ за које је $m_\varepsilon(K) \subset U$. Из (5) лако следи да је $m^*_\varepsilon \tau$ Поенкареов дуал подмногострукости M у U. Пошто лева страна у (5) зависи само од понашања форме у околини M, онда је $m^*_\varepsilon \tau$ Поенкареов дуал подмногострукости M и у E, дакле $m^*_\varepsilon \tau = \tau$. Тако видимо да Томова класа може да се реализује диференцијалном формом која има носач у U. Специјално, ако је $E = \nu S$ нормално раслојење затворене оријентисане подмногострукости $S \subset M$, из Теореме о цевастој околини (стр. 103) добијамо следеће тврђење.

Теорема 3. (Принцип локализације) *Поенкареов дуал затворене оријхентисане подмногострукости N у оријентисаној многострукости M може да се реализује диференцијалном формом са носачем у произвољно малој околини U која садржи N.*

Пример 15. Ако је $p \in M$, Поенкареов дуал скупа $N = \{p\}$ је класа $\mu \in H^{\dim M}(M)$ таква да је

$$\int_M \mu = 1$$

која може да се реализује формом са носачем у произвољној околини тачке p. Ово смо већ видели у Примеру 36 на стр. 46. $\sharp$

Задатак 11. Нека су M и N глатке многострукости, N оријентабилна и $f : M \to N$ глатко пресликавање које је *локални* дифеоморфизам. Доказати да је M оријентабилна. $\checkmark$

1.3. Конексије. Нека је (E, M, π) векторско раслојење ранга r над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Извод пројекције $\pi : E \to M$ у тачки $e \in E$ је пресликавање

$$\pi_*(e) : T_e E \to T_{\pi(e)} M.$$

Његово језгро

$$V_e := \ker \pi_*(e)$$

назива се *вертикалним потпростором* тангентног простора $T_e E$, а фамилија $\{V_e E\}_{e \in E}$ *вертикалном дистрибуцијом* тангентног раслојења TE. Приметимо да је

$$V_e \cong \mathbb{K}^r \quad \text{за све} \quad e \in E$$

и да је вертикална дистрибуција дефинисана *канонски*. Са друге стране, комплементарну, *хоризонталну дистрибуцију*, тј. фамилију $\{H_e\}_{e\in E}$ потпростора $H_e \subset T_eE$, такву да је

$$T_eE \cong V_e \oplus H_e \quad \text{за све} \quad e \in E \tag{10}$$

не можемо у општем случају да изаберемо канонски, већ је њен избор произвољан. Приметимо да сваки такав простор H_e има димензију $n = \dim M$, па може да се зада као језгро линеарног пресликавања

$$\Theta_e : T_eE \to \mathbb{K}^r, \tag{11}$$

односно, дистрибуција H може да се представи као језгро 1–форме са вредностима у векторском простору $\mathbb{K}^r$.

Дефиниција 8. *Конексија* на векторском раслојењу E је глатка дистрибуција хоризонталних потпростора у TE, тј. фамилија потпростора $H_e \subset T_eE$ која задовољава (10) и која може да се зада као језгро глатке 1–форме (11) са вредностима у векторском простору (или, еквивалентно, као пресек језгара r диференцијалних форми). $\Diamond$

Конексија свакако постоји на тривијалном раслојењу, па самим тим и на рестрикцији раслојења на сваки отворени скуп $U \subset M$ на коме постоји тривијализација. Избором форме (11) на свакој од тих тривијализација и применом разлагања јединице, закључујемо да на сваком раслојењу постоји конексија. Наравно, избор конексије на раслојењу није јединствен.

Није тешко видети да је рестрикција извода пројекције на хоризонтални потпростор, тј. пресликавање

$$\pi_*(e) : H_e \to T_{\pi(e)}M$$

изоморфизам векторских простора[3]. Његово инверзно пресликавање

$$h_e : T_{\pi(e)}M \to H_e \subset T_eE \tag{12}$$

назива се *хоризонталним подизањем* тангентног простора $T_{\pi(e)}M$. Нека је $\gamma : [0,1] \to M$ глатка крива. Тада се тангентни вектор $\frac{d\gamma}{dt}$ у тачки $\gamma(t)$ хоризонтално подиже у сваку тачку слоја $E_{\gamma(t)}$. Из теореме о егзистенцији и јединствености решења диференцијалних једначина следи да за сваку тачку $e \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ постоји јединствена крива $\Gamma : [0,1] \to E$ која подиже криву γ (тј. $\pi \circ \Gamma = \gamma$), таква да је њен тангентни вектор $\frac{d\Gamma}{dt}$ у свакој тачки хоризонталан и $\Gamma(0) = e$.

Дефиниција 9. Пресликавање

$$P^t_\gamma : E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(t)}, \tag{13}$$

које тачки $e \in E$ придружује тачку $\Gamma(t)$, где је Γ хоризонтално подизање пута γ које полази из тачке $\pi(e)$, назива се *паралелним кретањем* влакна $E_{\gamma(0)}$ дуж криве γ. $\Diamond$

Нека је $s : M \to E$ сечење векторског раслојења E. Његов извод

$$Ds : TM \to TE$$

[3]Другим речима, π је *субмерзија*; видети Дефиницију 20 на стр. 31.

је морфизам тангентних векторских раслојења. Уколико је на раслојењу E задата конексија, онда је, помоћу (10), дефинисана глатка фамилија пројекција

$$\pi_V(e) : T_eE \to V_e, \qquad e \in E.$$

Дефиниција 10. Композиција

$$\nabla s := \pi_V \circ Ds : TM \to V$$

назива се *коваријантним изводом* сечења s у у односу на конексију H (или форму конексије Θ). Коваријантни извод сечења s у правцу вектора X означава се са $\nabla_X s$. $\diamondsuit$

Дакле, ако је $p \in M$ и $X_p \in T_pM$, онда је $\nabla_{X_p}s = \pi_V(s(p)) \circ Ds(p)(X_p)$. Приметимо да је, за дато *векторско поље* $X : M \to TM$, коваријантни извод сечења s у правцу X пресликавање

$$\nabla_X s : M \to E, \qquad \nabla_{X_p}s(p) \in V_{s(p)} \cong E_p,$$

па може да се посматра и као сечење раслојења E, тј. објекат истог типа као s (за разлику од обичног извода $Ds(X) : M \to TE$ чији је кодомен већи простор од кодомена сечења s).

Тврђење 1. *Коваријантни извод има следећа својства:*

(1) $\nabla_{X+Y}s = \nabla_X s + \nabla_Y s$, $\nabla_{hX}s = h\nabla_X s$;
(2) $\nabla_X(s+t) = \nabla_X s + \nabla_X t$;
(3) $\nabla_X(fs) = df(X)s + f\nabla_X s$,

за сечења $s, t : M \to E$, *векторска поља* $X, Y : M \to TM$ *и глатке функције* $h, f : M \to \mathbb{K}$.

$\triangle$ Доказ следи из линеарности извода, Лајбницовог правила и линеарности пројекције π_V. $\triangledown$

Напомена 2. Видели смо како конексија дефинише коваријантни извод, али важи и обрнуто – ако је на раслојењу задато коваријантно диференцирање, тј. оператор који има својства из Тврђења 1, онда је њиме дефинисана и јединствена конексија. Због тога се некад конексија и коваријантни извод користе као синоними, па се каже „задата је конексија ∇ на многострукости M" и сл.

Да бисмо доказали егзистенцију и јединственост конексије која дефинише задато коваријантно диференцирање, приметимо да је довољно доказати да је за произвољно сечење $s : M \to E$ за које је $s(p) = e$ са

$$h_e(X_p) = Ds(X_p) - \nabla_{X_p}s \tag{14}$$

добро дефинисано хоризонтално подизање

$$h_e : T_pM \to T_eE.$$

Одатле одмах следи и егзистенција и јединственост хоризонталне дистрибуције. Једини нетривијалан детаљ је доказ да оваква дефиниција не зависи од избора сечења s. Да бисмо то видели, изаберимо произвољну конексију $\widetilde{H}$ на E. Она дефинише коваријантни извод $\widetilde{\nabla}$. Напишимо (14) у облику

$$h_e(X_p) = Ds(X_p) - \widetilde{\nabla}_{X_p}s + \widetilde{\nabla}_{X_p}s - \nabla_{X_p}s = \tilde{h}_e(X) + L(s, X), \tag{15}$$

где је $\tilde{h}_e$ хоризонтално подизање дефинисано конексијом $\widetilde{H}$, а $L(s, X) = \widetilde{\nabla}_{X_p}s - \nabla_{X_p}s$, на основу Лајбницовог правила, задовољава

$$L(fs, X) = fL(s, X). \tag{16}$$

за све глатке функције $f : E \to \mathbb{K}$. Из (16) следи да десна страна у (15) не зависи од избора s, него само од вредности $s(p)$.

Слично, појам паралелног кретања смо извели из конексије. Ако претпоставимо да је на раслојењу задато правило паралелног кретања, тј. линеарни изоморфизам влакана (13), онда коваријантни извод (а тиме и конексија) може да се дефинише помоћу

$$(\nabla_{X_p} s)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{P_\gamma^{-t}(s(\gamma(t))) - s(p)}{t},$$

где је $\gamma :]-\delta,\delta[\to M$, $\gamma(0) = p$, $\frac{d\gamma}{dt}(0) = X_p$. ◇

У специјалном случају раслојења $E = TM$, када су сечења $s : M \to TM$ векторска поља, оба аргумента s и X у $\nabla_X s$ су објекти истог типа[4], па могу и да замене места. Другим речима, има смисла поставити питање симетричности коваријантног извода, која би уопштила познату симетричност парцијалних извода за функције у еуклидском простору. Нека је $\mathcal{X}(M)$ модул сечења векторског раслојења TM (тј. глатких тангентних векторских поља на M) над прстеном $C^\infty(M)$.

Нека су $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ векторска поља и нека је на TM задата конексија. Посматрајмо разлику

$$F(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

Из Тврђења 1 следи да је пресликавање $F : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ линеарно над пољем скалара, али не и над $C^\infty(M)$: за функције $f : M \to \mathbb{K}$ важи

$$F(fX,Y) = fF(X,Y) - Y(f)X, \qquad F(X,fY) = fF(X,Y) + X(f)Y. \tag{17}$$

Приметимо да је одступање комутатора[5] $[X,Y]$ векторских поља од линеарности над $C^\infty(M)$ слично:

$$[fX,Y] = f[X,Y] - Y(f)X, \qquad [X,fY] = f[X,Y] + X(f)Y. \tag{18}$$

Из (17) и (18) следи да је

$$T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M), \qquad T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{19}$$

билинеарно над $C^\infty(M)$. Одатле следи да његова вредност у тачки зависи само од вредности векторских поља X и Y у тој тачки. Израз (19) називамо *торзијом* конексије помоћу које је коваријантни извод дефинисан. Кажемо да је конексија *симетрична* или *без торзије* ако је $T(X,Y) = 0$ за све $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, тј. ако је

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]. \tag{20}$$

Дефиниција 11. Нека је I интервал и $\gamma : I \to M$ глатка крива на многострукости M. Коваријантни извод векторског поља $X \in \mathcal{X}(M)$ дуж криве γ је

$$\frac{DX}{dt} := \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} X.$$

[4]Прецизније, у том случају је s тангентно векторско поље, а X вектор, јер s диференцирамо у правцу вектора X, али, тим пре, израз $\nabla_X s$ има смисла и ако је X векторско поље.

[5]*Комутатор* векторских поља, или *Лијев извод* векторског поља Y у правцу поља X је векторско поље $L_X Y := [X,Y]$ које на функције из $C^\infty(p)$ (глатке функције у околини тачке p) дејствује по правилу $[X,Y]f := X(Yf) - Y(Xf)$.

Као специјални случај Дефиниције 9, векторско поље X је *паралелно* дуж криве γ ако је $\frac{DX}{dt} = 0$.

На сличан начин се, за глатку површ $u : \Sigma \to M$ параметризвану отвореним скупом $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ дефинишу коваријантни парцијални изводи $\frac{DX}{\partial s}$ и $\frac{DX}{\partial t}$. $\diamondsuit$

Следеће тврђење показује како симетричност конексије уопштава симетричност парцијалних извода глатких функција у еуклидском простору.

Тврђење 2. *Нека је $u : \Sigma \to M$ глатка површ на многострукости M са симетричном конексијом. Тада је*

$$\frac{D}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{D}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial s}$$

$\triangle$ Тврђење је локално, па можемо да користимо координате. Нека је

$$u(s,t) = (x_1(s,t), \dots, x_n(s,t)).$$

Тада је

$$\frac{D}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial u}{\partial s}} \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Применом линеарности и Лајбницовог правила, одатле добијамо

$$\frac{D}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial^2 x_k}{\partial s \partial t}\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial t}\nabla_{\frac{\partial u}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial x_k} \tag{21}$$

Треба да покажемо да је оправдано у овом изразу заменити улоге s и t. За први сабирак то следи из комутативности парцијалних извода глатких функција u_k две реалне променљиве, тако да остаје само други сабирак. Пошто је

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_j},$$

други сабирак у (21) је једнак

$$\sum_{j,k} \frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial x_k}{\partial t}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{22}$$

Из симетричности конексије следи да је

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_k} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_j} + \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right].$$

Али, оператори $\frac{\partial}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial}{\partial x_j}$ комутирају, па је комутатор на крају претходног израза једанак нули. Одатле следи да је израз (22) једнак

$$\sum_{j,k} \frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial x_k}{\partial t}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_j},$$

што је, после преозначавања индекса сумирања j и k, управо израз (22) са промењеним улогама s и t. $\triangledown$

Напомена 3. Резултат коваријантног диференцирања $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}$ може да се напише у бази $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ у облику

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Симетричност конексије означава да је $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Ако су крива γ и векторско поље Y дуж γ задати у координатама са

$$\gamma = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad Y = \sum_{k=1}^{n} y_k(t) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

онда је

$$\frac{DY}{dt} = \sum_k \left(\frac{dy_k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k y_j(t) \frac{dx_i}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

У еуклидском простору је $\Gamma_{ij}^k = 0$, па други сабирак у претходном изразу мери одступање коваријантног диференцирања од еуклидског. $\diamond$

Дефиниција 12. *Риманова метрика* на многострукости M је глатка фамилија скаларних производа

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}.$$

Риманова многострукост је глатка многострукост са Римановом метриком. Глатко пресликавање $f : M \to N$ Риманових многострукости са Римановим метрикама $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$ назива се *локалном изометријом* ако је

$$f^* \langle \cdot, \cdot \rangle_N = \langle \cdot, \cdot \rangle_M.$$

Дифеоморфизам $f : M \to M$ који је локална изометрија назива се *изометријом.* $\diamondsuit$

Пример 16. Пошто је транслација у еуклидском простору $\mathbb{R}^n$ изометрија, можемо да дефинишемо метрику на торусу $\mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ тако да је пројекција

$$\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$$

локална изометрија. Торус са тако дефинисаном метриком назива се *равним торусом.* $\sharp$

Из постојања скаларног производа у еуклидском простору следи да на свакој глаткој многострукости може да се дефинише Риманова метрика. То може да се уради тако што се метрика локално дефинише у координатама, а затим глобално помоћу разлагања јединице, или тако што се многострукост утопи у еуклидски простор[6] и Риманова метрика дефинише као рестрикција скаларног производа из тог еуклидског простора.

У локалним координатама, или у еуклидском простору, Риманова метрика може да се напише у облику

$$ds^2 = \sum g_{jk} dx_j \otimes dx_k, \quad \text{или, краће,} \quad ds^2 = \sum g_{jk} dx_j dx_k,$$

где је (g_{jk}) симетрична матрица.

Пример 17. **(Хиперболичка геометрија)** Простор Лобачевског, или хиперболички простор, може, као што му само име каже, да се реализује као хиперболоид $H := \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = -1, x_0 > 0\}$ са метриком $ds_H^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \ldots + x_n^2$. Овај модел је мотивисан Теоријом релативности, у којој вектори брзине леже унутар „светлосног конуса”. Постоји још неколико модела n–димензионе геометрије Лобачевског; да бисмо их упоредили са моделом хиперболоида, сместићемо их све у простор $\mathbb{R}^{n+1}$.

[6]То је садржај Витнијеве теореме: свака глатка многострукост може да се утопи у еуклидски простор довољно велике димензије.

Модел полупростора је $\mathbb{R}^n_+ \cong \{(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 > 0\}$ са метриком $ds^2_+ = \frac{dx_0^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_{n-1}^2}{x_0^2}$.

Поенкареов модел, или модел диска, је $D := \{(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < 1\}$ са метриком $ds^2_D = 4\frac{dx_0^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_{n-1}^2}{(1 - x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2)^2}$.

Модел полусфере је $\Sigma := \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 > 0\}$ са метриком $ds^2_\Sigma = \frac{dx_0^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}{x_0^2}$.

Клајнов модел је $K := \{(1, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 < 1\}$ са метриком $ds^2_K = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}{1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2} + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + \ldots + x_n dx_n)^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2)^2}$.

Централне пројекције из центра $(-1, 0, \ldots, 0)$

$$H \to \Sigma, \qquad (x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1/x_0, x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0)$$

и

$$\Sigma \to D, \qquad (x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto (0, x_1/(1 + x_0), \ldots, x_n/(1 + x_0)),$$

вертикална пројекција

$$K \to \Sigma, \qquad (1, x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_n^2}, x_1, \ldots, x_n)$$

и централна пројекција из центра $(0, \ldots, 0, -1)$

$$\Sigma \to \mathbb{R}^n_+, \qquad (x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto (2x_0/(1 + x_n), \ldots, 2x_{n-1}/(1 + x_n), 1)$$

су изометрије између ових модела. $\sharp$

Природно је захтевати да коваријантни извод на Римановој многострукости има следеће својство, аналогно Лајбницовом правилу у еуклидском простору:

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle. \tag{23}$$

Испоставља се да на Римановој многострукости увек може да се изабере таква конексија, и то на јединствен начин:

Теорема 4. *На Римановој многострукости постоји јединствена конексија чији коваријантни извод уз три својства из Тврђења 1 има својства (20) и (23).*

$\triangle$ Ако, користећи (23), израчунамо изразе

$$X\langle Y, Z\rangle, \qquad Y\langle Z, X\rangle, \qquad Z\langle Y, X\rangle,$$

саберемо прва два и одузмемо трећи, а затим применимо (20), добијамо експлицитан израз за $\langle \nabla_X Y, Z\rangle$ из кога следи и егзистенција (јер израз важи за свако Z, па може да се сматра дефиницијом) и јединственост. $\bigtriangledown$

Напомена 4. Теорема 4 важи и ако је многострукост псеудо – Риманова, тј. ако је на њој задата недегенрисана, али не обавезно позитивно дефинитна, билинеарна форма (псеудо – Риманова метрика). Нпр, псеудо–метрика

$$\langle \xi, \eta\rangle := -\xi_0\eta_0 + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \cdots + \xi_n\eta_n$$

на $\mathbb{R}^{n+1}$ назива се *Лоренцовом (псеудо)метриком* и значајна је у Теорији релативности. $\diamond$

Дефиниција 13. Јединствена конексија из Теореме 4 назива се *Леви–Чивитином* или *Римановом* конексијом. $\Diamond$

Напомена 5. Користећи разлагање јединице, можемо да дефинишемо глатку фамилију скаларних производа (или хермицких форми у комплексном случају)

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_p : E_p \times E_p \to \mathbb{K}$$

на сваком раслојењу (E, M, π), тако да има смисла говорити и о конексијама сагласним са метриком и у овом, општијем, случају, као конексијама које задовољавају

$$X\langle s,t\rangle = \langle\nabla_X s, t\rangle + \langle s, \nabla_X t\rangle$$

за сва сечења $s, t : M \to E$ и свако векторско поље $X : M \to TM$. $\diamond$

Напомена 6. Нека је M подмногострукост димензије k у еуклидском простору $\mathbb{R}^n$, са Римановом метриком која је рестрикција еуклидске; другим речима, са Римановом метриком дефинисаном са $\iota^*\langle\cdot,\cdot\rangle$ где је $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ инклузија, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скаларни производ у $\mathbb{R}^n$. Векторског поље $Y : M \to TM$ можемо да схватимо као пресликавање $Y : M \to \mathbb{R}^n$, користећи уобичајену идентификацију вектора у еуклидском простору. Нека је $D_X Y$ извод тог пресликавања у правцу Y. За свако $p \in M$ је дефинисана ортогонална пројекција

$$\pi : T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \to T_pM.$$

Дефинишимо

$$\nabla_X Y := \pi(D_X(Y)).$$

Није тешко видети да овако дефинисана операција ∇ задовољава аксиоме којима је дефинисана (јединствена) Леви–Чивитина конексија у односу на Риманову метрику на M наслеђену из $\mathbb{R}^n$. $\diamond$

1.4. Кривина конексије. Нека је ∇ коваријантни извод на векторском раслојењу E. Осим симетричности разматране у Тврђењу 2 и дискусији пре њега, везане за симетричност коваријантног извода, тј. поређење израза $\nabla_X Y$ и $\nabla_Y X$, природно је поставити и питање поређења поновљених коваријантних извода $\nabla_X\nabla_Y$ и $\nabla_Y\nabla_X$. Као и у дискусији пре Тврђења 2, природно је разлици $\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X$ додати члан који обезбеђује линеарност над $C^\infty(M)$. Следећа лема се доказује директним рачуном:

Лема 1. *Пресликавање*

$$R : TM \oplus TM \oplus E \to E, \qquad R(X,Y)s := ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]})s$$

је C^∞–линеарно по све три промењљиве.

Дефиниција 14. Пресликавање R из Леме 1,

$$R(X,Y)s := \nabla_X\nabla_Y s - \nabla_Y\nabla_X s - \nabla_{[X,Y]}s,$$

назива се *кривином* конексије ∇. $\diamondsuit$

У специјалном случају $E = TM$ имамо следеће тврђење, које се доказује на сличан начин као Тврђење 2:

Тврђење 3. *Нека је M глатка многострукост, Σ отворен скуп у $\mathbb{R}^2$, $u : \Sigma \to M$ параметризована површ и Z глатко векторско поље дуж Σ (тј. сечење раслојења $T_\Sigma M$). Тада је*

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}Z - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}Z = R\Big(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}\Big)Z.$$

$\triangle$ Тврђење је локално, па можемо да радимо у координатама. Нека је

$$Z = \sum_j z_j(s,t)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Тада је

$$\frac{D}{\partial t}Z = \sum_j z_j \frac{D}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_j \frac{\partial z_j}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Ако овај израз сада диференцирамо по s, а затим од добијеног израза одузмемо израз са промењеним улогама s и t, добијамо

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}Z - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}Z = \sum_j z_j\left(\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_j}\right). \tag{24}$$

Остаје да израчунамо $\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j}$ и $\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_j}$. Нека је

$$u(s,t) = (x_1(s,t), x_2(s,t), \ldots, x_n(s,t)).$$

Тада је

$$\frac{D}{dt}\frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla_{\sum_k \frac{\partial x_k}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial t}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Диференцирањем добијеног израза по s добијамо

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial^2 x_k}{\partial s\partial t}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{ik}\frac{\partial x_k}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial s}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Ако сада изменимо улоге s и t и направимо разлику, добијамо

$$\left(\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t} - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i,j}\frac{\partial x_k}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial s}\left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\right]\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{25}$$

Пошто је $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right] = 0$, тј.

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} = \left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\right]\frac{\partial}{\partial x_j},$$

тврђење следи из (25), (24) и линеарности R. $\bigtriangledown$

Дефиниција 15. Нека су $X_p, Y_p \in T_pM$ два ортогонална јединична вектора и Σ_p и $\Sigma_p \subset T_pM$ њихов дводимензиони линеарни омотач. Величина

$$K(\Sigma_p) := -\langle R(X_p, Y_p)X_p, Y_p\rangle$$

назива се *секционом кривином* . $\diamondsuit$

Напомена 7. Нека су $X_p, Y_p \in T_pM$ два линеарно независна (не обавезно ортогонална) вектора и $\Sigma_p \subset T_pM$ њихов линеарни омотач. Секциона кривина може да се дефинише и као израз

$$K(\Sigma_p) = -\frac{\langle R(X_p, Y_p)X_p, Y_p\rangle}{\|X_p \times Y_p\|^2}, \tag{26}$$

где је $\|X_p \times Y_p\| := \sqrt{\|X_p\|^2\,\|Y_p\|^2 - \langle X_p, Y_p\rangle^2}$ површина паралелограма над X_p и Y_p. Заиста, израз (26) је симетричан по X_p и Y_p и инваријантан у односу на трансформације

$$(X_p, Y_p) \mapsto (\lambda X_p, Y_p), \qquad (X_p, Y_p) \mapsto (X_p + \lambda Y_p, Y_p,$$

одакле следи да он зависи само од равни Σ_p, а не и од избора базе у њој.

Линеарно алгебарска чињеница је да секциона кривина једнозначно одређује кривину R. Прецизније, посматрајмо тензор[7], означен истим словом R као и кривина без страха од забуне, дефинисан са

$$R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y,Z),W\rangle.$$

Он задовољава следеће једнакости (прва од њих се назива *Бјанкијевим идентитетом*:

(1) $R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0$;
(2) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$;
(3) $R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$;
(4) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$.

Ако су R_1 и R_2 два тензора која задовољавају ове једнакости, онда их задовољава и тензор $T = R_1 - R_2$. Ако сада претпоставимо да су R_1 и R_2 дефинисани кривинама које имају исту секциону кривину, можемо да покажемо, користећи претходна четири својства за T, да је

$$0 = T(X_p + Z_p, Y_p, X_p + Z_p, Y_p) = 2T(X_p, Y_p, Z_p, Y_p),$$

а одатле да је

$$0 = T(X_p, Y_p + W_p, Z_p, Y_p + W_p) = T(Z_p, W_p, X_p, Y_p) - T(W_p, X_p, Z_p, Y_p).$$

Тако добијамо $T(Z_p, W_p, X_p, Y_p) = T(W_p, X_p, Z_p, Y_p)$, што значи да је тензор T инваријантан у односу на пермутације које учествују у Бјанкијевом идентитету, па је $T \equiv 0$, тј. $R_1 \equiv R_2$. ◇

Задатак 12. Доказати да ако Риманову метрику помножимо константом c, добијамо секциону кривину помножену константом c^{-1}. ✓

Дефиниција 16. Риманова многострукост се назива *изотропном у тачки* p, ако је секциона кривина $K(\Sigma_p)$ иста за сваку раван $\Sigma_p \in T_p$. Кажемо да је M *изотропна многострукост* ако је изотропна у свакој својој тачки. Кажемо да је изотропна многострукост M *многострукост константне кривине* ако је њена секциона кривина иста у свакој тачки. ◇

Напомена 8. Нека је M Риманова многострукост, са тензором R дефинисаним, као у Напомени 7, помоћу кривине. Непосредно се проверава да и тензор

$$R_0(X,Y,Z,W) := \langle X,Z\rangle \langle Y,W\rangle - \langle Y,Z\rangle \langle X,W\rangle$$

задовољава својства (1)–(4) из Напомене 7. Понављајући аргумент из те напомене, о одређености кривине R секционом кривином (који се ослања само на чињеницу да тензори о којима је реч задовољавају својства (1)–(4)), видимо да је M многострукост константне кривине K ако и само је $R = KR_0$. ◇

Напомена 9. Ако је M повезана изотропна Риманова многострукост и ако је $\dim M \geq 3$, онда је секциона кривина K_p константна. Другим речима, за повезане многострукости димензије веће од 2, независност величине $K(\Sigma_p)$ од избора равни $\Sigma_p \in T_pM$ за свако појединачно $p \in M$ повлачи независност те величине и од p. Ово тврђење је познато као *Шурова теорема.* Дводимензионе

[7] *Тензор* је вишелинеарно (над C^∞) пресликавање $TM \times \cdots \times TM \times T^*M \times \cdots \times T^*M \to C^\infty(M)$. Ако на левој страни има k копија тангентног и j копија котангентног раслојења, говоримо о тензору типа (k,j). Тензори типа $(k,0)$ називају се *коваријантним*, а типа $(0,j)$ *контраваријантним*.

многострукости (односно површи) су, из тривијалног разлога, изотропне; њихова секциона кривина се назива *Гаусовом кривином.* површи. Она може да зависи од $p \in M$. $\diamond$

Пример 18. **(Кривине површи и кривих)** Гаус је кривину површи дефинисао на други начин, полазећи од површи утопљене у еуклидски простор и метрике наслеђене из тог простора. Нека је површ Σ у $\mathbb{R}^3$ параметризована са

$$\mathbf{S} : D \to \mathbb{R}^3, \qquad (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

где је $D \subset \mathbb{R}^2$ отворен скуп. Тада је

$$\mathbf{n} : \Sigma \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{n} = \left\| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right\|^{-1} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}$$

векторско поље јединичних нормала на површ Σ. Билинеарно пресликавање

$$\mathrm{II} : T\Sigma \times T\Sigma \to T\Sigma, \qquad \mathrm{II}(X, Y) = \langle D\mathbf{n}(X), Y \rangle \tag{27}$$

назива се *другом квадратном формом* површи Σ. Директним рачуном се види да је друга квадратна форма површи убази $E_1 = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}$, $E_2 = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}$ дата матрицом

$$[\mathrm{II}] = \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix}$$

где је

$$l = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u^2}, \mathbf{n} \right\rangle, \quad m = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u \partial v}, \mathbf{n} \right\rangle, \quad n = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial v^2}, \mathbf{n} \right\rangle,$$

што се некад записује у облику

$$\mathrm{II} = l\, du^2 + 2m\, du dv + n\, dv^2.$$

Диференцирањем израза $\|\mathbf{n}\|^2 \equiv 1$ у правцу X добијамо израз $\langle D\mathbf{n}(X), \mathbf{n} \rangle = 0$, па је пресликавање

$$X \mapsto D\mathbf{n}(X), \tag{28}$$

које се појављује у дефиницији (27), у свакој тачки $p \in M$ линеарно пресликавање $T_pM \to T_pM$. Његове сопствене вредности називају се *главним кривинама* површи. Из чињенице да је II симетрична форма следи да су главне кривине реалне вредности. *Гаусова кривина* K површи је детерминанта овог пресликавања, дакле производ главних кривина, а *средња кривина* H њихова аритметичка средина, тј. половина трага пресликавања (28). Ове величине могу да се израчунају као:

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{1}{2} \frac{Gl - 2Fm + En}{EG - F^2} \tag{29}$$

где је

$$E = \left\langle \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \right\rangle = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2$$

$$F = \left\langle \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right\rangle = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G = \left\langle \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right\rangle = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2.$$

Ови изрази су нам познати из почетних курсева Анализе; знамо да је величина

$$\sqrt{EG - F^2} = \left\| \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \right\|,$$

чији се квадрат појављује у имениоцима Гаусове и средње кривине (29) инфинитезимална површина на површи Σ.

Може да се докаже и да су главне кривине површи минимална и максимална кривина кривих које се добијају као пресек површи Σ и равни које садрже $\mathbf{n}$ (тј. *нормалних равни* површи). Подсетимо се да се кривина криве

$$\gamma : [0, l] \to \mathbb{R}, \qquad s \mapsto \gamma(s)$$

параметризоване дужином лука, дефинише као норма вектора убрзања, тј. као

$$\kappa(s) := \|\gamma''(s)\|.$$

У Френеовом ортонормираном реперу

$$\mathbf{T}(s) := \alpha'(s), \qquad \mathbf{N}(s) := \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|}, \qquad \mathbf{B}(s) := \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$$

кривина κ и торзија τ криве се појављују као скаларне величине које описују кретање тог репера дуж криве, помоћу израза

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix},$$

познатог као *Френе–Сереове формуле.* $\sharp$

Важна особина Гаусове кривине површи Σ је да је она једнака секционој кривини. То се најлакше види ако се у бази

$$E_1 = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}, \quad E_2 = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v} \quad \in \quad T\Sigma$$

израчуна израз

$$\langle R(E_1, E_2)E_1, E_2\rangle = \langle \nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1 - \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1, E_2\rangle,$$

користећи опис операције ∇ из Напомене 6, помоћу обичног диференцирања и пројекције у $\mathbb{R}^3$. Тако добијамо

$$\nabla_{E_1}E_2 = \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u \partial v} - \left\langle \mathbf{n}, \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial u \partial v} \right\rangle \mathbf{n}, \quad \nabla_{E_2}E_2 = \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial v^2} - \left\langle \mathbf{n}, \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial v^2} \right\rangle \mathbf{n}.$$

Ако сада ове изразе, на сличан начин, коваријантно диференцирамо још једном, први у правцу E_1, а други у правцу E_2, разлику добијених израза скаларно помножимо са E_2, после мало рачуна добијамо да је

$$\langle R(E_1, E_2)E_1, E_2\rangle = ln - m^2,$$

што је бројилац у изразу (29) за Гаусову кривину K. Интерпретација имениоца тог израза, као квадрата површине, нам је позната из основних курсева Анализе. Тако добијамо једнакост

$$\frac{\langle R(E_1, E_2)E_1, E_2\rangle}{\|E_1 \times E_2\|^2} = \frac{ln - m^2}{EG - F^2},$$

што је једнакост између Гаусове и секционе кривине површи. Пошто секциона кривина зависи само од метрике, добијамо следећу теорему:

Теорема 5. (Гаусова „Egregium”) *Изометрија чува Гаусову кривину.*

Напомена 10. Значај Гаусове Egregium (што значи *изванредне*) теореме је у томе што је Гаус кривину дефинисао као меру закривљености површи у амбијентном простору, а не помоћу метрике (и из ње изведене Леви–Чивитине конексије и Риманове кривине) као ми.

Гаусова конструкција кривине као мере закривљености површи у амбијенту $\mathbb{R}^3$ може да се пренесе на општију ситуацију имерзије $f : M \to \overline{M}$, где је $\dim M = n$, $\dim \overline{M} = n + m$. Пошто је f имерзија, Риманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\overline{M}$ индукује Риманову метрику $f^*\langle\cdot,\cdot\rangle$ на M, у односу на те метрике f је локална изометрија. У односу на Риманову метрику на $\overline{M}$, за свако $p \in f(M)$ тангенти простор $T_p\overline{M}$ може да се напише као ортогонална директна сума[8]

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

па сваки вектор $V_p \in T_pM$ може на јединствен начин да се напише у облику

$$V_p = V_p^\top + V_p^\perp$$

Нека су $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ два векторска поља на M, (односно, уз њихову идентификацију са $f_*(X)$, $f_*(Y)$, векторска поља на $f(M)$). Њих можемо да проширимо, бар локално, у околини U тачке p, до векторских поља $\overline{X}$, $\overline{Y}$ на $\overline{M}$. Ако је $\overline{\nabla}$ Леви–Чивитина конексија на $\overline{M}$, онда је са

$$\nabla_X Y := (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top$$

дефинисана Леви–Чивитина конексија на M у односу на индуковану Риманову метрику. Из својстава Леви–Чивитине конексије следи да је са

$$B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^\perp, \qquad B(X,Y) := \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

добро дефинисана (тј. независна од проширења $\overline{X}$, $\overline{Y}$) симетрична билинеарна форма. За сваки нормални вектор $N_p \in T_pM^\perp$ билинеарна форма

$$\mathrm{II}_{N_p} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, \qquad \mathrm{II}_{N_p}(X_p, Y_p) := \langle B(X_p, Y_p), N_p\rangle$$

назива се *другом фундаменталном формом* имерзије f у тачки p, у правцу N_p. Њој је природно придружен симетрични линеарни оператор

$$S_{N_p} : T_pM \to T_pM, \qquad \mathrm{II}_{N_p}(X_p, Y_p) = \langle S_{N_p}(X_p), Y_p\rangle.$$

Ако је N произвољно нормално векторско поље које је у тачки p једнако N_p, онда је

$$S_{N_p}(X_p) = -(\overline{\nabla}_{X_p} N)^\top,$$

па оператор S мери промену нормале N у тангентном правцу X_p. Пошто је оператор S_{N_p} симетричан, његове сопствене вредности су реалне, а сопствени вектори међусобно ортогонални. Специјално, ако је $\dim \overline{M} = \dim M + 1$ и ако су M и $\overline{M}$ оријентисане многострукости (тј. оријентабилне и са изабраном оријентацијом), можемо да изаберемо јединични нормални вектор N_p и базу сопствених вектора $E_p^1, \ldots, E_p^n \in T_pM$ оператора S_{N_p}, тако да $E_p^1, \ldots, E_p^n$ и $E_p^1, \ldots, E_p^n, N$ дају оријентације у T_pM и $T_p\overline{M}$. Вектори E_p^j називају се *главним*

[8]Прецизније, али и незграпније, би било написати $T_p\overline{M} = f_*(T_pM) \oplus f^*(T_pM)^\perp$, али, будући да се ради о имерзији, можемо да извршимо идентификације које оправдавају запис који смо употребили – свака тачка $p \in M$ има околину U која се дифеоморфно пресликава на $f(U)$, а $f_* : TU \to Tf(U)$ је изоморфизам векторских раслојења. Векторска поља на M мозeмо, локално, помоћу ових идентификација да сматрамо векторксим пољима на $f(M)$

правцима, а одговарајуће сопствене вредности $\lambda_j(p)$ *главним кривинама* хиперповрши M у тачки p. Гаусова кривина се дефинише као производ главних кривина (тј. као детерминанта оператора S_{N_p}), а средња кривина као њихова аритметичка средина (односно као $n^{-1}\mathrm{tr}\, S_{N_p}$).

У општем случају, када M није кодимензије 1, средња кривина у тачки $p \in M$ се дефинише као *вектор* $\mathrm{tr}\,\mathrm{B}$:

$$\overrightarrow{H}(p) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{B}(E_j, E_j),$$

где је $\{E_j\}$ ортонормирана база тангентног простора T_pM. Вектор средње кривине је значајан у теорији минималних површи из следећег разлога. Нека је μ канонска форма запремине на M индукована Риманвом метриком, наслеђеном из $\overline{M}$. Нека је X векторско поље дуж M и нека је φ_t деформација подмногострукости M у правцу X; прецизније, нека је

$$\varphi_t : M \to \overline{M}, \qquad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t(q) = X_q.$$

Ако са $V(\cdot)$ означимо запремину дефинисану формом μ, може да се докаже да је

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} V(\varphi_t(M)) = -\int_M \langle \overrightarrow{H}, X\rangle\, \mu.$$

То оправдава термин *минималне подмногострукости* који се користи за многострукости са $\overrightarrow{H} \equiv 0$ – то су многострукости које су критичне тачке (потенцијални минимуми) функционала запремине. Специјално, *минималне површи* су дводимензионе минималне подмногострукости. $\diamond$

Пример 19. Гаусова кривина еуклидске равни $\mathbb{R}^2$ је $K = 0$. Секциона кривина еуклидског простора $\mathbb{R}^n$ са стандардном еуклидском метриком једнака нули. $\sharp$

Пример 20. Посматрајмо криву

$$[0, l] \to \mathbb{R}^3, \qquad s \mapsto (x(s), 0, z(s))$$

у xz–равни, параметризовану дужином лука s (тако да је $x'(s)^2 + z'(s)^2 = 1$). Површ добијена ротацијом ове криве око z–осе има параметризацију

$$\mathbf{S}(s,\theta) = (x(s)\cos\theta, x(s)\sin\theta, z(s)), \quad (s,\theta) \in [0,l] \times [0, 2\pi[,$$

па је

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial s} = (x'(s)\cos\theta, x'(s)\sin\theta, z'(s)), \qquad \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \theta} = (-x(s)\sin\theta, x(s)\cos\theta, 0).$$

Одатле следи

$$E = x'(s) + z'(s) = 1, \qquad F = 0, \qquad G = (x(s))^2.$$

Нешто дужим рачуном изводимо коефицијенте друге фундаменталне форме

$$l = x'z'' - x''z', \qquad m = 0, \qquad n = xz'$$

одакле добијамо изразе за Гаусову и средњу кривину ротационих површи. Треба имати у виду да су ти изрази нешто компликованији ако крива ротације није параметризована дужином лука. $\sharp$

Пример 21. Специјални случај Примера 20, је јединична сфера $\mathbb{S}^2$; њена Гаусова кривина је $K = 1$. Општије, секциона кривина сфере $\mathbb{S}^n$ је $K = 1$. ♯

Задатак 13. Нека је $\mathbf{T}^2$ торус у $\mathbb{R}^3$ реализован као ротациона површ. Доказати да је

$$x = (c + a\cos v)\cos u, \qquad y = (c + a\cos v)\sin u, \qquad z = a\sin v$$

једна параметризација торуса. Доказати да је Гаусова кривина торуса

$$K = \frac{2\cos v}{a(c + a\cos v)}.$$

Извести одатле закључак да торус са метриком наслеђеном из $\mathbb{R}^3$ није (ни локално) изометричан равном торусу из Примера 16 (за $n = 2$). ✓

Задатак 14. Израчунати секциону кривину параболоида $z = x^2 + y^2$. ✓

1.5. Форма конексије и форма кривине. Нека је на векторском раслојењу (E, M, π) задата конексија (хоризонтална дистрибуција) H и из ње изведени коваријантни извод ∇ и кривина R.

Коваријантни извод може да се дефинише и као линеарно пресликавање

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(\mathrm{Hom}(TM, E)) \cong \Gamma(T^*M \otimes E)$$

(где је $\Gamma(\cdot)$ векторски простор сечења раслојења) које задовољава Лајбницово правило

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s \qquad \text{за све } \ f \in C^\infty(M).$$

Нека је $U \subset M$ скуп на коме се рестрикција E_U тривијализује. У тривијализацији

$$\psi : E_U \to U \times \mathbb{K}^r$$

обичан извод ds дефинише један коваријантни извод. Из Лајбницовог правила следи да је разлика

$$\Gamma_\psi := \nabla - d : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E) \tag{30}$$

билинеарно пресликавање над $C^\infty(M)$.

Дефиниција 17. Пресликавање (30) назива се *Кристофеловим пресликавањем* тривијализације ψ. За изабране канонске базе

$$\frac{\partial}{\partial x_j},\ 1 \le j \le \dim M \qquad \text{и} \qquad e_\alpha,\ 1 \le \alpha \le \operatorname{rang} E$$

простора TM и E у тривијализацији ψ Кристофелово пресликавање је одређено *Кристофеловим симболима* $\Gamma^\beta_{j\alpha}(p)$, тј. коефицијентима у запису

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} e_\alpha = \sum_{\beta=1}^{r} \Gamma^\beta_{j\alpha} e_\beta$$

коваријантног диференцирања у канонским базама дефинисаним тривијализацијом ψ. ◊

Кристофелово пресликавање (30) је, за фиксирано s, линеарно пресликавање по X, па може да се напише помоћу 1–форме θ на M, са вредностима у $\mathrm{Hom}(E_U, E_U)$. Другим речима, ако је $\{e_1, \dots, e_r\}$ база у слојевима тривијализације E_U, свако сечење $s : U \to E_U$ може да се напише као

$$s = h_1 e + \cdots + h_r e_r, \qquad \text{за неке } \ h_1, \dots, h_r \in C^\infty(M).$$

Тада је
$$\nabla s=\sum_{j=1}^{r}(dh_j\otimes e_j+h_j\nabla e_j).$$
Коваријантни извод сечења e_j у бази $\{e_1,\dots,e_r\}$ је
$$\nabla e_j=\sum_{i=1}^{r}\theta_{ij}\otimes e_i,$$
где су θ_{ij} 1–форме на U, па је
$$\nabla s=\sum_{i=1}^{r}\left(dh_i+\sum_{j=1}^{r}h_j\theta_{ij}\right)\otimes e_i.$$

Дефиниција 18. Диференцијална 1–форма $\theta:=(\theta_{i,j})$ са матричним вредностима назива се *формом конексије* у бази $e_1,\dots,e_r$. $\diamondsuit$

У специјалном случају раслојења $E=T^*M$, коваријантни извод је пресликавање
$$\nabla:\Gamma(T^*M)\to\Gamma(T^*M\otimes T^*M).$$
Њега можемо да компонујемо са пресликавањем
$$\wedge:\Gamma(T^*M\otimes T^*M)\to\Omega^2(M)$$
(где је $\Omega^2(M)$ простор диференцијалних 2–форми на M) и добијемо композицију
$$\wedge\circ\nabla:\Gamma(T^*M)=\Omega^1(M)\to\Omega^2(M).$$

Дефиниција 19. Конексија на раслојењу T^*M се назива *симетричном* ако је $\wedge\circ\nabla=d$, где је $d:\Omega^1(M)\to\Omega^2(M)$ спољашњи диференцијал. $\diamondsuit$

Задатак 15. Нека су Γ_{ij}^k Кристофелови симболи конексије у локалној бази $dx_1,\dots,dx_n$ котангентног раслојења. Доказати да је конексија симетрична ако и само ако је $\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$. ✓

Нека је U Риманова многострукост димензије n са тривијалним тангентним раслојењем TU (нпр. координатна карта произвољне Риманове многострукости) и нека су дата векторска поља $E_1,\dots,E_n$ која су база у TU. Нека су 1–форме $\eta_1,\dots,\eta_n$ дуална база у T^*U, тј.$\eta_i(E_j)=\delta_{ij}$. Тада је је $g_{ij}=\langle E_i,E_j\rangle$ функција на U, $g=(g_{ij})_{1\le i,j\le n}$ функција са вредностима у простору матрица $\mathbb{R}^{n\times n}$, а $\eta:=(\eta_1,\dots,\eta_n)$ диференцијална 1–форма са вредностима у $\mathbb{R}^n$. Важи следеће тврђење.

Тврђење 4. *Постоји једнинствена 1–форма $\theta:=(\theta_{ij})_{1\le i,j\le n}$ на U са матричним вредностима за коју важи*

(1) $d\eta-\eta\wedge\theta=0$;
(2) $dg=\theta\wedge g+g\wedge\theta$.

Та форма је форма Леви–Чивитине конексије. Обрнуто, форма Леви–Чивитине конексије има својства (1) и (2).

△ Приметимо да је множење на десној страни у (1) и (2) матрично множење; запис ових једначина у координатама је
$$d\eta_i=\sum_{j=1}^{n}\eta_j\wedge\theta_{ji},\qquad dg_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(\theta_{ik}g_{kj}+\theta_{jk}g_{ki}).$$

Коваријанти извод конексије са формом θ је дефинисан са

$$\nabla_X E_k = \sum_{j=1}^{n} \theta_{kj}(X)E_j, \qquad \nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y.$$

Једначина (1) је, на основу Леме 1 на стр. 24, еквивалентно симетричности $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, а својство (2) Лајбницовом правилу $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$. Одатле следи да је Тврђење 4 само дуална реформулација Теореме 4 на стр. 73. $\bigtriangledown$

Последица 2. *Ако је $\{E_j\}$ ортонормирана база и $\{\eta_j\}$ њена дуална база, онда једначине из Тврђења 4 имају облик*

(1) $d\eta - \eta \wedge \theta = 0$;
(2) $\theta + \theta^T = 0$,

односно, у координатама,

(1) $d\eta_i = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \wedge \theta_{ji}$;
(2) $\theta_{ji} + \theta_{ji} = 0$.

Задатак 16. Формулисати и доказати глобалну (без претпоставке о тривијалности тангентног раслојења) верзију Тврђења 4. ✓

Лема 2. *За задати коваријантни извод*

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$$

постоји јединствено линеарно пресликавање

$$\widehat{\nabla} : \Gamma(T^*M \otimes E) \to \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes E)$$

које задовољава Лајбницово правило

$$\widehat{\nabla}(\sigma \otimes s) = d\sigma \otimes s - \sigma \wedge \nabla s \tag{31}$$

за сваку 1–форму $\sigma \in \Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$ и свако сечење $s \in \Gamma(E)$.

$\bigtriangleup$ Ако је $e_1, \dots, e_r$ локална база сечења, израз

$$\widehat{\nabla} \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \otimes e_j = \sum_{j=1}^{r} (d\sigma_j \otimes e_j - \sigma_j \wedge \nabla e_j) \tag{32}$$

доказује и егзистенцију (тј. даје дефиницију) и јединственост. $\bigtriangledown$

Лема 3. *Композиција*

$$\widehat{\nabla} \circ \nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(\Omega^2(M) \otimes E)$$

је кривина конексије ∇.

Лему 3 и Лајбницово правило (31) можемо да сместимо у природнији амбијент на следећи начин. Под диференцијалним k–формама са вредностима у векторском раслојењу E подразумевамо сечења раслојења $\Lambda^k(T^*M) \otimes E$, тј.

$$\Omega^k(M; E) := \Gamma(\Lambda^k(T^*M) \otimes E). \tag{33}$$

Другим речима, $\Omega^k(M; E)$ је простор антисиметричних k–линеарних пресликавања на T_pM са вредностима у E_p, глатких по p. Специјално, $\Omega^0(M; E) = \Gamma(E)$ је простор сечења раслојења E. Коваријантни извод је пресликавање

$$\nabla : \Omega^0(M; E) \to \Omega^1(M; E),$$

које је композиција вертикалне пројекције и обичног извода d. Њега можемо на природан начин да продужимо до пресликавања

$$d_\nabla : \Omega^k(M;E) \to \Omega^{k+1}(M;E)$$

(тако да је за на нивоу 0–форми $d_\nabla := \nabla : \Omega^0(M;E) \to \Omega^1(M;E)$), помоћу Лајбницовог правила

$$d(\nu \otimes s) := d\nu \otimes s + (-1)^k \nu \wedge \nabla s.$$

Тиме је дефинисан *оператор спољашњег коваријантног диференцирања* d_∇. За разлику од обичног оператора спољашњег диференцирања d, квадрат оператора d_∇ *није нула.* Лема 3 може да се формулише и на следећи начин:

Лема 4. *Композиција*

$$d_\nabla \circ d_\nabla : \Omega^0(M;E) \to \Omega^2(M;E)$$

је кривина конексије ∇.

$\triangle$ Нека је $\{e_j\}$ база у $\Omega^0(M;E)$. Из (32) следи да је

$$d_\nabla \circ d_\nabla(e_j) = \sum_{i=1}^r \left(d\theta_{ji} - \sum_{k=1}^r \theta_{jk} \wedge \theta_{ki} \right) \otimes e_i,$$

па је $d_\nabla \circ d_\nabla$ задато матричном 2–формом $\omega = (\omega_{ij})$, где је

$$\omega_{ij} = d\theta_{ij} - \sum_{k=1}^r \theta_{jk} \wedge \theta_{ki}$$

или, у матричном запису,

$$\omega := d\theta - \theta \wedge \theta, \tag{34}$$

где је множење на десној страни матрично множење. Доказ леме следи из примене формула за спољашњи извод и спољашњи производ за 1–форме ς

$$d\varsigma(X,Y) = X\varsigma(Y) - Y\varsigma(X) - \varsigma([X,Y]), \quad \varsigma \wedge \upsilon(X,Y) = \varsigma(X)\upsilon(Y) - \varsigma(Y)\upsilon(X)$$

на форму конексије θ и поређењем са

$$\nabla_X \nabla_Y s = d_\nabla(d_\nabla s + \theta \cdot s)(Y)(X) = \dots$$

Остатак доказа може да се схвати као задатак. $\bigtriangledown$

Дефиниција 20. Форма ω у (34) назива се *формом кривине* конексије дефинисане формом θ. $\Diamond$

Дефиниција 21. Једначина (34) и две једначине из Тврђења 4 називају се *Картановим структурним једначинама.* $\Diamond$

Напомена 11. Картанове структурне једначине можемо да искористимо за доказ Шурове теореме из Напомене 9 на стр. 76. Нека је $\{E_j\}$ ортонормирана база и $\{\eta_j\}$ њена дуална база, као у Последици 2. Ако је секциона кривина у свакој тачки p једнака $K(p)$ за сваку дводимензиону раван у T_pM, онда је форма кривине $\omega = -K\eta \wedge \eta$. Ако ову једнакост диференцирамо и искористимо Картанове структурне једнакости добијамо $dK = 0$, што значи да је K константа, ако је $\dim M \geq 3$.

Ако је M дводимензиона површ, онда је форма кривине

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & -K \\ -K & 0 \end{bmatrix} \eta_1 \wedge \eta_2,$$

где је K Гаусова, односно секциона, кривина. $\diamond$

Уопштење Леме 4 је следећа лема

Лема 5. *За сваку k–форму $\sigma \in \Omega^k(M; E)$ важи*

$$d_\nabla \circ d_\nabla(\sigma) = R_\nabla \wedge \sigma,$$

где је R_∇ кривина конексије ∇.

Претходна лема показује да кривина мери одступање квадрата спољашњег коваријантног извода од нуле. Сем те, алгебарске, кривина има и следећу, геометријску, улогу. Нека је I_H идеал форми које се поништавају на хоризонталној дистрибуцији, тј. конексији са формом конексије θ (видети дефиницију пре Фробенијусове теореме на стр. 23. Нека су $(x_1, \dots, x_n; e_1, \dots, e_r)$ локалне координате на E. Пошто се коваријантни извод $\nabla = d + \theta$ поништава на хоризонталним сечењима, следи да је идеал I_Δ генерисан формама $de_j + \theta_{ij}e_j$. Диференцирањем добијамо генераторе идеала dI_H:

$$d(de_j + \theta_{ij}e_j) \equiv (d\theta - \theta \wedge \theta)e_j \pmod{I_H} \tag{35}$$

(јер је $d = \nabla - \theta \equiv -\theta \pmod{I_H}$). Пошто је $\omega = d\theta - \theta \wedge \theta$ форма кривине, из (35) Фробенијусове теореме (стр. 23) следи

Тврђење 5. *Хоризонтална дистрибуција је интеграбилна ако и само ако је кривина једнака нули.*

$\triangle$ Доказ остављамо као задатак. $\bigtriangledown$

Напомена 12. Дуална формулација Напомене 8 је следећа. Нека је M Риманова многострукости, нека су векторска поља $E_1, \dots, E_n$ локална ортонормирана база тангентног раслојења и нека су 1–форме $\eta_1, \dots, \eta_n$ дуална ($\eta_i(E_j) = \delta_{ij}$) локална база котангентног раслојења. Нека је θ форма Леви–Чивитине конексије. Многострукост M има константну секциону кривину K ако и само ако је форма кривине $\omega = d\theta - \theta \wedge \theta$ дата матрицом $\omega = (\omega_{ij})$ где је, $\omega_{ij} = -K\theta_i \wedge \theta_j$. $\diamond$

Пример 22. (Кривина простора Лобачевског) У моделу полупростора $\mathbb{R}^n_+$ са метриком $ds^2 = x_n^{-2}(dx_1^2 + \ldots + dx_n^2)$, векторска поља $E_j = x_n \frac{\partial}{\partial x_j}$ дефинишу ортонормирану базу тангентног раслојења. Дуална база котангентног раслојења дефинисана је ковекторима $\eta_j = x_n^{-1}dx_j$. Диференцијалне форме $\theta_{ij} = \delta_{ni}\eta_j - \delta_{nj}\eta_i$ задовољавају услове Тврђења 4 на стр. 82 (у овом случају је $g_{ij} = x_n^{-1}\delta_{ij}$), па дефинишу форму Леви–Чивитине конексије. Њена форма кривине је

$$\omega_{ij} = (d\theta - \theta \wedge \theta)_{ij} = d\theta_{ij} - \sum_{k=1}^{n} \theta_{ik} \wedge \theta_{kj} = \eta_i \wedge \eta_j.$$

На основу Напомене 12, одатле следи да је $K = -1$. $\sharp$

2. Варијације енергије

Нека је M Риманова многострукост са Леви–Чивитином конексијом и из ње изведеним коваријантним изводом ∇. Риманова метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle$ дефинише на сваком тангентном простору T_pM норму $\|X_p\| := \sqrt{\langle X_p, X_p \rangle}$. Покушајмо да одговоримо на питање:

(♣) Шта је растојање између две тачке на M?

Нека је $[0, c]$ интервал у $\mathbb{R}$ и $\gamma : [0, c] \to M$ глатка крива. По аналогији са дефиницијом дужине криве у еуклидском простору, дужину криве дефинишемо са

$$L(\gamma) = \int_0^c \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt, \tag{36}$$

где је

$$\dot{\gamma}(t) := \frac{d\gamma}{dt}(t).$$

Нешто једноставнији израз (који не укључује квадратни корен)

$$E(\gamma) = \int_0^c \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \, dt \tag{37}$$

назива се *функционалом енергије.* Из Коши – Шварцове неједнакости следи да је

$$(L(\gamma))^2 \leq cE(\gamma), \tag{38}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је крива γ параметризована природним параметром, тј. дужином лука. Подсетимо се да сваку регуларну криву можемо да параметризујемо природним параметром. Али, приметимо да интеграл (36) не зависи од параметризације, али да интеграл (37) зависи.

Логично је растојањем између тачака p и q прогласити инфимум функционала L, дефинисаног на скупу кривих кривих које спајају те две тачке (кажемо да крива $\gamma : [0, c] \to M$ спаја тачке p и q ако је $\gamma(0) = p$ и $\gamma(c) = q$). Наравно, уколико тај инфимум постоји.

У изучавању питања (♣) може да нам помогне следећа лема, која мотивише трагање за минимумом функционала енергије, који је једноставнији од функционала дужине.[9]

Лема 6. *Нека је $\alpha : [0, c] \to M$ крива која минимизује растојање између тачака p и q, параметризована природним параметром. Тада за сваку криву $\gamma : [0, c] \to M$ која спаја тачке p и q важи*

$$E(\alpha) \leq E(\gamma),$$

при чему једнакост важи ако и само ако γ минимизује дужину и параметризована је природним параметром.

△ Из (38) следи $cE(\alpha) = (L(\alpha))^2 \leq (L(\gamma))^2 \leq cE(\gamma)$, одакле следи доказ. ▽

2.1. Прва варијација енергије. Нека је $\gamma : [0, c] \to M$ глатка крива која спаја тачке p и q. Глатка фамилија глатких кривих $\gamma_s : [0, c] \to M$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$, које спајају тачке p и q, таква да је $\gamma_0 = \gamma$, назива се *варијацијом криве* γ.

Ако крива $\gamma := \gamma_0$ минимизује функционал E, онда је

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} E(\gamma_s) = 0 \tag{39}$$

за сваку њену варијацију γ_s. Наравно, из (39) не следи да је γ_0 минимум. Крива γ_0 за коју важи (39) назива се *екстремалом* функционала E на скупу кривих које спајају тачке p и q.

---

[9] Друга мотивација долази, не из геометрије, већ из класичне механике: функционал E је функционал дејства слободне честице. Општије, функционал дејства у пољу са потенцијалом V је $E_V(\gamma) = \int [1/2\|\dot{\gamma}(t)\|^2 - V(\gamma(t))] \, dt$.

Тврђење 6. *Крива* $\gamma : [0,c] \to M$ *је екстремала функционала* E *на скупу кривих које спајају* p *и* q *ако и само ако је*

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0.$$

$\triangle$ Користећи чињеницу да је ∇ Леви–Чивита конексија, диференцирањем под знаком интеграла добијамо

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(\gamma_s) = 2\int_0^c \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial \gamma_s}{\partial t}, \frac{\partial \gamma_s}{\partial t}\right\rangle\Big|_{s=0} dt = 2\int_0^c \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \gamma_s}{\partial s}, \frac{\partial \gamma_s}{\partial t}\right\rangle\Big|_{s=0} dt$$

(у првом кораку смо користили (23) на стр. 73, а у другом Тврђење 2 на стр. 71). Одатле добијамо (после још једне примене (23) на стр. 73) да је

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(\gamma_s) = 2\int_0^c \frac{d}{dt}\left\langle \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}, \frac{\partial \gamma_s}{\partial t}\right\rangle\Big|_{s=0} dt - 2\int_0^c \left\langle \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \gamma_s}{\partial t}\right\rangle\Big|_{s=0} dt. \tag{40}$$

Из Њутн–Лајбницове формуле следи да је први интеграл једнак нули (јер су крајеви p и q фиксирани, па је $\frac{\partial\gamma_s}{\partial s}(0) = \frac{\partial\gamma_s}{\partial s}(c) = 0$. Да би други интеграл био једнак нули *за сваку варијацију* γ_s, неопходно је да буде

$$\frac{D}{dt}\frac{d\gamma_0}{dt} = 0,$$

тј. $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$. $\triangledown$

Напомена 13. Ако је $\gamma_s(t)$ слободна варијација криве $\gamma_0(t) = \gamma(t)$, тј. без услова да су крајеви фиксирани, онда је први интеграл на десној страни у (40) једнак разлици вредности подинтегралне функције на крајевима интервала, па је

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} E(\gamma_s) = 2\left\langle \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}, \frac{\partial \gamma_s}{\partial t}\right\rangle\Big|_{s=0}\Big|_{t=0}^{t=c} - 2\int_0^c \left\langle \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \gamma_s}{\partial t}\right\rangle\Big|_{s=0} dt \tag{41}$$

формула прве варијације на простору кривих са слободним крајевима. $\diamond$

Напомена 14. Нека је $\gamma : [0,c] \to M$ регуларна[10] крива која задовољава $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$. Тада је

$$\frac{d}{dt}\|\dot\gamma\|^2 = \frac{d}{dt}\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle = 2\langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,\dot\gamma\rangle = 0,$$

па је $\|\dot\gamma\| = const$. Одатле следи да је

$$s(t) = \int_0^t \|\dot\gamma\|\, dt = ct,$$

па је крива γ параметризована параметром који је пропорционалан природном параметру, тј. дужини лука. $\diamond$

Тврђење 7. *Нека је* γ *крива која задовољава* $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$. *Тада је* γ *екстремала функционала дужине* L.

$\triangle$ Као у доказу Тврђења 6, диференцирамо $L(\gamma_s)$ под знаком интеграла, у тачки $s = 0$. Пошто је $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$, из Напомене 14 следи да је

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\|\dot\gamma_s\|^2 = 2\|\dot\gamma_0\|\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\|\dot\gamma_s\| = c\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\|\dot\gamma_s\|,$$

па је остатак доказа исти као у Тврђењу 6. $\triangledown$

[10] Глатка крива $\gamma : I \to M$ је *регуларна* ако је $\frac{d\gamma}{dt}(t) \neq 0$ за све $t \in I$.

Дефиниција 22. Глатка крива која задовољава једначину $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ назива се *геодезијском линијом* конексије ∇. $\diamondsuit$

Напомена 15. Геодезијска линија је дефинисана конексијом. Ако је та конексија Леви–Чивитина, из претходних тврђења следи да су геодезијске линије екстремале функционала енергије и дужине. Међутим, није свака екстремала функционала дужине геодезијска линија. Нпр, права $\gamma(t) = (t^2, 0)$ у $\mathbb{R}^2$ свакако је екстремала (чак и минимум) функционала дужине. Међутим, $\dot\gamma(t) = (2t, 0)$, што није вектор константне дужине, па из Напомене 14 следи да γ није геодезијска. Исту праву (схваћену као геометријско место тачака, дакле непараметризовану) можемо да параметризујемо са $\alpha(t) = (t, 0)$. Крива α јесте геодезијска линија.

Ово је још једна предност рада са функционалом E уместо са L – функционал L не зависи од параметризације, па су и криве γ и α његове екстремале. Крива γ, међутим, није екстремала функционала E. Екстремале функционала енергије долазе са природном параметризацијом, или њеном линеарном репараметризацијом.

Прецизније, ако је γ геодезијска линија, онда је и њена параметризација $t \mapsto \gamma(t)$ параметром t геодезијска линија ако и само ако је $s = at + b$, где је s природни параметар, а $a \neq 0$ и b константе. Ово следи директно из Напомене 14, јер из $ds/dt = \|d\gamma/dt\|$ следи $s = at + b$. $\diamond$

Задатак 17. Доказати да екстремале функционала

$$E_V(\gamma) = \int_0^a \left(\frac{1}{2}\|\dot\gamma(t)\|^2 - V(\gamma(t))\right) dt$$

на простору кривих са фиксираним крајевима задовољавају једначину

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = -\operatorname{grad} V(\gamma),$$

што је Други Њутнов закон у пољу потенцијалне силе $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} V$. ✓

Напомена 16. **(Ојлер–Лагранжеве једначине)** Тврђење 6 и Задатак 17 могу да се изведу из општијег варијационог принципа. Нека је $L : TM \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ глатка функција. Тада су екстремале функционала

$$S(\gamma) := \int_0^1 L(q(t), \dot q(t), t)\, dt$$

на простору глатких кривих $\gamma : [0, 1] \to TM$ са фиксираним крајевима решења *Ојлер–Лагранжевих једначина*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{42}$$

Једначине (42) се изводе на исти начин као доказ Тврђења 6. Функција L назива се *Лагранжијаном* варијационог проблема. $\diamond$

Пример 23. Вратимо се још једном на површи у $\mathbb{R}^3$, о којима смо говорили у Примеру 18. Ако крива γ лежи на површи Σ, осим Френеовог репера природан је и репер

$$\mathbf{T} := \gamma'(s), \qquad \mathbf{n}(s), \qquad \mathbf{n}(s) \times \mathbf{T}(s),$$

где је $\mathbf{n}(s)$ вектор јединичне нормале на површ Σ у тачки $\gamma(s)$, који је, у општем случају, различит од вектора $\mathbf{N}(s)$. И овај репер је ортонормиран, јер крива

γ лежи на површи Σ. Пошто је крива γ параметризована дужином лука, њен вектор брзине има константну дужину 1, па диференцирањем израза $\|\gamma'(s)\|^2 \equiv 1$ добијамо $\gamma'(s) \perp \gamma''(s)$. Одатле следи да је $\gamma''(s)$ линеарна комбинација

$$\gamma''(s) = \kappa_n(s)\mathbf{n}(s) + \kappa_g(s)\mathbf{n}(s) \times \mathbf{T}(s). \tag{43}$$

Величине $\kappa_n(s)$ и $\kappa_g(s)$ називамо *нормалном* и *геодезијском кривином* криве γ на површи Σ у тачки $\gamma(s)$. У светлу Напомене 6 на стр. 74, из (43) следи да је

$$\nabla_{\gamma'(s)}\gamma'(s) = \kappa_g(s)\mathbf{n}(s) \times \mathbf{T}(s), \tag{44}$$

где је ∇ коваријантни извод дефинисан Леви–Чивитином конексијом на Σ у односу на Риманову метрику наслеђену из $\mathbb{R}^3$. Из (44) закључујемо да је крива на површи Σ геодезијска линија (у Римановој метрици на Σ наслеђеној из $\mathbb{R}^3$) ако и само ако је њена геодезијска кривина једнака нули.

Имајући у виду Напомену 10, геодезијску и нормалну кривину можемо да дефинишемо и у општијој ситуацији, за криве на подмногострукости $M \subset \overline{M}$: ако је $\gamma : [0, l] \to M$ крива параметризована дужином лука s, $T(s) = \gamma'(s)$ њено поље вектора брзине и

$$\frac{DT}{ds}(s) = \left(\frac{DT}{ds}\right)^{\top} \oplus \left(\frac{DT}{ds}\right)^{\perp} \in T_{\gamma(s)}M \cong (T_{\gamma(s)}M)^{\top} \oplus (T_{\gamma(s)}M)^{\perp},$$

геодезијска и нормална кривина се дефинишу са

$$\kappa_g(s) = \left\| \left(\frac{DT}{ds}\right)^{\top} \right\|, \qquad \kappa_n(s) = \left\| \left(\frac{DT}{ds}\right)^{\perp} \right\|.$$

Крива γ је геодезијска линија у M ако и само ако је $\kappa_g \equiv 0$. Наравно, одатле не следи да је γ геодезијска линија у $\overline{M}$. Подмногострукост $M \subset \overline{M}$ (или, општије, имерзија[11] $f : M \to \overline{M}$) се назива *тотално геодезијском* ако је свака геодезијска линија у M истовремено и геодезијска линија у $\overline{M}$. Ако је свака геодезијска у M која полази из тачке p истовремено и геодезијска у $\overline{M}$, подмногострукост M (или имерзију $f : M \to \overline{M}$) називамо *геодезијском у тачки* p. $\sharp$

Задатак 18. Доказати да је $\kappa_n(s) = \mathrm{II}(\gamma'(s), \gamma'(s))$. ✓

2.2. Геодезијска векторска поља и геодезијски ток. Нека је на тангентном раслојењу TM задата конексија. Њоме је дефинисано хоризонтално подизање (12)

$$h : TM \to T(TM).$$

Нека је $X_p \in T_pM$. Тада је у тангентном простору $T_{X_p}(TM)$ дефинисан јединствени вектор

$$G_{X_p} = h_p(X_p).$$

Дефиниција 23. Векторско поље

$$G : TM \to T(TM), \qquad G_{X_p} = h_p(X_p)$$

назива се *геодезијским векторским пољем* на TM. Његове интегралне криве, тј. решења диференцијалне једначине

$$c :]-\delta, \delta[\to TM, \qquad \frac{dc}{dt} = G(c(t))$$

називају се *геодезијским током.* $\diamondsuit$

[11] Или, прецизније речено, подскуп $f(M) \subset \overline{M}$ где је $f : M \to \overline{M}$ имерзија.

Подвуцимо да су криве геодезијског тока криве на TM; њихове пројекције на M су геодезијске линије. Објаснимо ово и у координатама. Геодезијска линија на M је решење диференцијалне једначине другог реда $\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}=0$. Нека је $\gamma(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$ координатни запис криве γ. Тада је

$$\frac{d\gamma}{dt}=\sum_k \frac{dx_k}{dt},$$

па се једначина геодезијске линије $\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}=0$ записује, у ознакама из Напомене 3, као систем диференцијалних једначина другог реда

$$\frac{d^2x_k}{dt^2}+\sum_{ij}\Gamma_{ij}^k\,\frac{dx_i}{dt}\,\frac{dx_j}{dt}=0. \tag{45}$$

Као што нам је познато из курса Диференцијалних једначина, диференцијална једначина другог реда по $x(t)$ своди се на систем две диференцијалне једначине првог реда увођењем смене $y(t)=\frac{dx}{dt}$. Ова смена управо одговара подизању са базе на тангентно раслојење; њеном применом на (45) добијамо систем једначина

$$\frac{dx_k}{dt}=y_k, \qquad \frac{dy_k}{dt}+\sum_{ij}\Gamma_{ij}^k\,\frac{dx_i}{dt}\,\frac{dx_j}{dt}=0. \tag{46}$$

Решење једначине (46) је геодезијски ток, а његова пројекција на M – решења једначине (45), односно геодезијске линије.

Из Теореме о егзистенцији и јединствености решења диференцијалних једначина добијамо следеће тврђење:

Тврђење 8. *За сваку тачку $p\in M$ постоји отворена околина $V\ni p$, позитивни бројеви δ и ε, и глатко пресликавање*

$$\alpha:]-\delta,\delta[\times U\to M, \qquad U:=\{X\in T_VM \mid \|X\|<\varepsilon\}$$

такво да је крива $t\mapsto\alpha(t,X_q)$ јединствена геодезијска линија која пролази у тренутку $t=0$ кроз тачку q брзином X_q, тј. јединствено решење једначине геодезијских

$$\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}=0, \qquad \gamma(0)=q, \qquad \frac{d\gamma}{dt}(0)=X_q.$$

$\triangle$ Доказ је директна последица егзистенције и јединствености решења диференцијалне једначине другог реда са два почетна услова. $\triangledown$

Лема 7. *Геодезијске линије имају следеће својство хомогености: ако је геодезијска линија $\alpha(t,X_q)$ дефинисана на интервалу $]-\delta,\delta[$ и $a>0$, онда је геодезијска линија $\alpha(t,aX_q)$ дефинисана на интервалу $]-a^{-1}\delta,a^{-1}\delta[$ и важи*

$$\alpha(t,aX_q)=\alpha(at,X_q). \tag{47}$$

$\triangle$ Доказ следи из чињенице да обе стране у (47) задовољавају исту диференцијалну једначину са истим почетним условима и јединствености решења диференцијалних једначина. $\triangledown$

Подсетимо се да, у општем случају, Теорема о егзистенцији и јединствености диференцијалних једначина гарантује решење само *локално*, тј. да није увек могуће продужити га са интервала $]-\delta,\delta[$. Међутим, Лема 7 нам омогућава да у случају једначине геодезијских линија докажемо следеће тврђење.

Тврђење 9. *За сваку тачку $p \in M$ постоји околина $V \ni p$, број $\varepsilon > 0$ и глатко пресликавање*

$$\alpha :]-2, 2[\times U \to M, \qquad U := \{X \in T_V M \mid \|X\| < \varepsilon\}$$

такво да је $t \mapsto \alpha(t, X_q)$ јединствена геодезијска линија која у тренутку $t = 0$ пролази кроз тачку q брзином X_q.

$\triangle$ Из Тврђења 8 следи постојање геодезијске линије $\alpha(t, X_q)$ дефинисане за $t \in]-\delta, \delta[$. На основу Леме 7, $\alpha(t, 2^{-1}\delta X_q)$ је геодезијска линија која је дефинисана за $t \in]-2, 2[$. $\triangledown$

Доказано тврђење нам омогућава следећу дефиницију.

Дефиниција 24. Нека су α и U као у Тврђењу 9. Пресликавање

$$\exp : U \to M, \qquad X_q \mapsto \alpha(1, X_q)$$

назива се *експоненцијалним пресликавањем.* За $q \in M$ са

$$\exp_q : B]0; \varepsilon[\subset T_q M \to M$$

означавамо рестрикцију експоненцијалног пресликавања на отворену лопту полупречника ε у $T_q M$. $\Diamond$

Тврђење 10. *За сваку тачку $q \in M$ постоји $\varepsilon > 0$, такво да је*

$$\exp_q : B]0; \varepsilon[\subset T_q M \to M$$

дифеоморфизам лопте $B]0; \varepsilon[$ на отворен подскуп у M. При томе је

$$D(\exp_q)_0 = \mathrm{id}_{T_q M}. \tag{48}$$

$\triangle$ Довољно је доказати (48); чињеница да је $\exp_q$ дифеоморфизам следи одатле, на основу Теорме о инверзној функцији. Нека је $X_q \in T_q M$ произвољан вектор. Тада је

$$D(\exp_q)_0(X_q) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp_q(tX_q) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \alpha(1, tX_q) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \alpha(t, X_q) = X_q,$$

чиме је (48) доказано. $\triangledown$

Дефиниција 25. Слика $\exp_q(W) \subset M$ отвореног подскупа $W \subset B]0; \varepsilon[$ назива се *нормалном околином* тачке q. Специјално, слике лопти $\exp_q(B]0; \delta[)$, за $\delta < \varepsilon$, називамо *геодезијским лоптама* на M, а слике њихових граничних сфера $\exp_q(S]0; \delta[)$ *геодезијским сферама* са центром q и полупречником δ. $\Diamond$

Тврђење 11. **(Гаусова лема)** *Геодезијски сегменти $t \mapsto \exp_q(tX_q)$ су ортогонални на геодезијске сфере.*

$\triangle$ Доказ може да се изведе из формуле прве варијације енергије (видети Напомену 13 на стр. 87). Пошто је $\exp_q$ дифеоморфизам, свака крива на геодезијској сфери може да се параметризује као $\exp_q(X(s))$, где је $X_q(s) \in T_q M$ фамилија вектора константне дужине $\|X_q(s)\| \equiv \delta$. Нека је $X_q(0) = X_q$ и $\gamma_s(t) := \exp_q(tX_q(s))$ варијација геодезијског сегмента $t \mapsto \exp_q(tX_q)$.

Све криве варијације γ_s су геодезијске линије, па је интеграл на десној страни у формули прве варијације (41) једнак нули. Почетна тачка сваке криве из фамилије γ_s је $\gamma_s(0) = q$, па је

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} E(\gamma_s) = \left\langle \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}, \frac{\partial \gamma_s}{\partial t} \right\rangle\bigg|_{s=0}\bigg|_{t=c}. \tag{49}$$

Пошто је $\dot{\gamma_s} = \|X(s)\| \equiv \delta$, вредност $E(\gamma_s)$ не зависи од s, па је израз на левој страни (49) једнак нули, што значи да су вектори $\frac{\partial\gamma_s}{\partial s}\big|_{s=0,t=c}$ и $\frac{\partial\gamma_s}{\partial t}\big|_{s=0,t=c}$ ортогонални. $\triangledown$

Из Гаусове леме можемо да изведемо следеће минимизирајуће својство геодезијских линија:

Теорема 6. *Нека је $B \subset M$ геодезијска лопта са центром q. Нека је $\gamma : [0,1] \to B$ геодезијска линија, таква да је $\gamma(0) = p$. Тада за сваку глатку криву $\beta : [0,1] \to M$ за коју је $\beta(0) = p$ и $\beta(1) = \gamma(1)$ важи $L(\gamma) \leq L(\beta)$. При томе, једнакост важи ако и само ако је $\gamma([0,1]) = \beta[(0,1)]$.*

$\triangle$ Приметимо да је $\gamma(t) = \exp_q(tY_q)$ за неки вектор $Y_q \in T_q$ јединствена геодезијска линија која полази из тачке q брзином Y_q.

Претпоставимо прво да је $\beta([0,1]) \subset B$. Пошто је $\exp_q$ дифеоморфизам, можемо да напишемо

$$\beta(t) = \exp_q(b(t)X_q(t)),$$

за $b : [0,1] \to [0,+\infty[$ и $X_q(t) \in T_qM$, $\|X_q(t)\| \equiv 1$. Посматрајмо функцију две промењљиве

$$u(b,t) = \exp_q(bX_q(t)).$$

Из Гаусове леме следи да је

$$\frac{\partial u}{\partial b} \perp \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{50}$$

а из чињенице да је, за фиксирано t, $b \mapsto u(b,t)$ геодезијска линија (чији вектор брзине има константну дужину), следи да је

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial b}(b,t)\right\| = \left\|\frac{\partial u}{\partial b}(0,t)\right\| = \|X_q\| = 1 \tag{51}$$

Пошто је $\beta(t) = u(b(t),t)$, из (50) и (51) следи да је

$$\|\dot\beta(t)\|^2 = |b'(t)|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 \geq |b'(t)|^2. \tag{52}$$

Одатле добијамо

$$L(\beta) = \int_0^1 \left\|\frac{d\beta}{dt}\right\| dt \geq \int_0^1 |b'(t)|\, dt \geq b(1) - b(0) = L(\gamma), \tag{53}$$

јер је $b(0) = 0$ и $L(\gamma) = 1$.

Ако је неједнакост (52) строга, онда је строга и неједнакост (53). То значи да је $L(\gamma) = L(\beta)$ ако и само ако је други сабирак у (52) једнак нули, тј. $X_q(t) \equiv const$. У том случају је крива β глатка репараметризација геодезијске линије γ.

Претпоставимо сада крива β, која полази из тачке q, напушта B. Нека је $t_0 < 1$ најмања вредност параметра t за које је $\beta(t_0) \in \partial B$. Тада, према доказаном делу тврђења, дужина криве $\beta([0,t_1])$, није мања од дужине δ геодезијског сегмента који спаја q и $\beta(t_1)$. Пошто је дужина криве γ мања од δ, тиме је доказ завршен. $\triangledown$

Последица 3. *Нека је M Риманова многострукост. Пресликавање*

$$d : M \times M \to [0,+\infty[, \qquad d(p,q) := \inf_\gamma L(\gamma)$$

где је инфимум узет по свим део по део глатким кривим γ које спајају тачке p и q је добро дефинисана метрика на M.

$\triangle$ Нека је $p \neq q$. Тада постоји B геодезијска лопта са центром у тачки p и полупречником $\delta > 0$, која не садржи тачку q. Из Теореме 6 сада следи да је дужина сваке криве која спаја тачке p и q већа од δ, што доказује недегенерисаност. Остала својства метрике се доказују једноставно. $\bigtriangledown$

Задатак 19. Доказати да се топологија у метричком простору (M, d) са метриком из Последице 3 подудара са топологијом многострукости M. ✓

Тиме смо одговорили на питање (♣) постављено на почетку овог параграфа.

Напомена 17. У Дефиницији 12 на стр. 72 смо дефинисали изометрију, као дифеоморфизам који чува Риманову метрику. Очигледно је да је свака изометрија Риманове многострукости, у смислу те дефиниције, истовремено и изометрија метричког простора (M, d) из Последице 3, у смислу изометрије метричких простора. Може да се докаже да важи и обрнуто – свака глатка изометрија метричког простора (M, d) дефинисаног у Последици 3 је изометрија Риманове многострукости $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. $\diamond$

Дефиниција 26. Геодезијска линија која минимизује растојање између својих крајњих тачака назива се *минималном геодезијском линијом.* $\lozenge$

Следећа теорема може да се сматра униформизацијом Теореме 6 – она показује да свака тачка $p \in M$ има околину V у којој *сваке* две тачке $q_1, q_2 \in V$ могу да се споје јединственом минималном геодезијском линијом.

Теорема 7. *Нека је р Риманова многострукост. За сваку тачку $p \in M$ постоји отворена околина $V \ni p$ и број $\delta > 0$, такви да је за свако $q \in V$*

$$\exp_q : B]0; \delta[\to M$$

дифеоморфизам лопте $B]0; \delta[$ на $\exp_q(B]0; \delta[)$, при чему је $V \subset \exp_q(B]0; \delta[)$. Другим речима, свака тачка $p \in M$ има околину V која је нормална околина сваке своје тачке.

$\triangle$ Нека су U и ε као у Тврђењу 9. Посматрајмо

$$\exp : U \to M \times M, \qquad X_q \mapsto (q, \exp_q(X_q))$$

као пресликавање две променљиве $q \in M$ и $X_q \in T_qM$ са кодоменом $M \times M$. Из Тврђења 10 следи да је

$$D\exp_{(p,0)} = \begin{bmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ \mathrm{id} & \mathrm{id} \end{bmatrix},$$

па је exp дифеоморфизам неке околине W тачке $(p, 0)$ на околину $\exp(W)$ тачке $(p, p) = (p, \exp_p(0))$. Можемо да претпоставимо да је $W = \{X_q \in T_BM \mid \|X_q\| < \delta\}$, за неку околину B тачке p. Изаберимо околину V тачке p, тако да буде $V \times V \subset \exp(W)$; она задовољава услове теореме. Заиста, ако је $q \in V$ и $B]0; \delta[\subset T_qM$, из чињенице да је exp дифеоморфизам следи $\{q\} \times V \subset \exp(B]0; \delta[$, односно $V \subset \exp_q(B]0; \delta[)$. $\bigtriangledown$

Дефиниција 27. Околина V из Теореме 7 назива се *тотално нормалном околином* тачке p. $\lozenge$

Последица 4. *Нека је M Риманова многострукост и $\gamma : [0, c] \to M$ глатка крива, параметризована параметром пропорционалним дужини лука. Ако је њена дужина мања од дужине произвољне део по део глатке криве која спаја тачке $\gamma(0)$ и $\gamma(c)$, онда је γ геодезијска линија.*

$\triangle$ Пошто је „бити геодезијска линија" локално својство криве, доказ следи из чињенице да свака тачка $\gamma(t)$, према Теореми 7, има тотално нормалну околину, у којој сваке две тачке могу да се споје јединственом минималном геодезијском линијом. $\triangledown$

Последица 5. *Свака тачка q на Римановој многострукости има околину U, такву да за сваке две тачке $p_0, p_1 \in U$ постоји јединствена геодезијска линија $\gamma : [0, l] \to M$, параметризована дужином лука, таква да је $\gamma(0) = p_0$, $\gamma(l) = p_1$ и $l = d(p_0, p_1)$.*

Пример 24. Праве су једине геодезијске линије у еуклидском простору $\mathbb{R}^n$. Један начин да се то види је помоћу диференцијалних једначина: у еуклидској метрици у $\mathbb{R}^n$ коваријантни извод у односу на Леви–Чивитину конексију се подудара са обичним изводом, па су једначине геодезијских линија $\mathbf{r}''(t) = 0$. Решења ових једначина су линеарне функције.

Други, више геометријски, начин је следећи. Нека је C геодезијска линија. Довољно је да докажемо да за свака тачка $p_0 \in C$ има довољно малу околину U, такву да је $U \cap C$ сегмент праве. Пошто је, по дефиницији, еуклидска метрика дата стандардним скаларним производом, група транслација дејствује транзитивно и изометрично на $\mathbb{R}^n$, па је довољно ово доказати за тачку $p_0 = 0$. Нека је B геодезијска лопта са центром у нули и $q \in B \cap C$. Тада је C *јединствена* минималном геодезијском линија у B која спаја тачке 0 и q. Оначимно са l праву која садржи тачку q и координатни почетак. Пошто група $O(n)$ дејствује изометрично на $\mathbb{R}^n$, свака матрица $A \in O(n)$ пресликава минималне геодезијске линије на геодезијске линије. Специјално, то важи и за ротацију R_l око праве l, па је $R_l(C)$ геодезијска линија. Пошто је $R_l(0) = 0$ и $R_l(q) = q$, $R_l(C)$ је минимална геодезијска која спаја тачке 0 и q. Пошто је таква минимална геодезијска јединствена у B, следи да је $R_l(C \cap B) = C \cap B$. Међутим, једина крива коју ротација R_l слика на себе је сама права l.

Приметимо да нам други аргумент даје само опис непараметризованих геодезијских линија, док први, кроз решавање диференцијалне једначине, даје и параметризације. $\sharp$

Напомена 18. Резултат Примера 24 у случају равни $\mathbb{R}^2$ је познато тврђење из еуклидске планиметрије, да је права најкраће растојање између две тачке. Оно може да се формулише и на следећи начин: график реалне функције једне реалне променљиве класе C^2 је геодезијска линија ако и само ако је права, тј. ако и само ако је та функција линеарна.

Природно је следеће уопштење овог резултата. Нека је $D \subset \mathbb{R}^2$ и нека је $f : V \to \mathbb{R}$ функција класе C^2. Знамо да је површина графика ове функције

$$A(f) = \int_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dxdy.$$

Кажемо да је тај график *минимална површ* ако и само ако је f критична тачка функционала A. У том случају је

$$\operatorname{div} \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}. \tag{54}$$

У [**15**] С. Н. Бернштајн је доказао да је график минимална површ ако и само ако је он раван (тј. ако и само ако је f афино пресликавање). Поставио је хипотезу је и график пресликавања $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ минимална површ у $\mathbb{R}^{n+1}$ ако и само ако је он хиперраван. Једначина (54) има смисла за произвољно n и еквивалентна је једначини $H = 0$, где је H средња кривина хиперповрши.

Испоставило се да је Бернштајнова хипотеза тачна за $n \le 7$ (ово, као и нека друга уопштења Бернштајнове теореме могу да се виде у [**29, 30, 23, 7, 49**]), али и да је за $n \ge 8$ погрешна [**17**]. $\diamond$

Пример 25. Нека је на сфери $\mathbb{S}^n$ задата Риманова метрика, наслеђена из еуклидског простора $\mathbb{R}^{n+1}$. Једине геодезијске линије на овој Римановој многострукости су велики кругови (пресеци сфере са равнима кроз њен центар). Заиста, нека је C велики круг, и $p, q \in C$ две тачке, такве да се q налази у геодезијској лопти са центром p. Из Теореме 6 следи да постоји јединствена минимална геодезијска линија која спаја p и q. Пошто је рефлексија у односу на хиперраван која садржи круг C изометрија, одатле следи да је слика минималне геодезијске линије која спаја p и q такође минимална геодезијска. Пошто се једино крива C при рефлексији слика у себе, из јединствености минималне геодезијске линије следи да је C геодезијска линија. $\sharp$

Задатак 20. У Напомени 15 на стр 88 смо видели да својство „бити геодезијска линија” зависи од параметризације. Наћи (неку) параметризацију у којој су велики кругови из Примера 25 геодезијске линије. ✓

Задатак 21. Доказати да су меридијани (тј. криве $\theta = \theta_0$ за константу $\theta_0 \in [0, 2\pi]$) ротационих површи описаних у Примеру 20 на стр. 80 геодезијске линије, а да су паралеле (тј. криве $s = s_0$ за неку константу $s_0 \in [0, l]$) геодезијске линије ако и само ако је $x'(s_0) = 0$. Упутство: директним рачуном доказати да је

$$\gamma'' \perp \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial s} \qquad \text{и} \qquad \gamma'' \perp \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \theta} \tag{55}$$

ако је γ меридијан и испитати под којим условом (55) важи ако је γ паралела. Други начин: приметити да је γ геодезијска линија ако и само ако су вектори $\mathbf{n}(s)$ и $\mathbf{N}(s)$, о којима је било речи у Примеру 20, паралелни и искористити чињеницу да је ротација око z–осе изометрија. ✓

Пример 26. Теорема 6 каже да геодезијске линије *локално* минимализују дужину. Глобално, то не мора да буде тачно. На пример, на сфери $\mathbb{S}^n$ геодезијске линије су велики кругови. Ако је $M = \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ сфера без једне тачке, геодезијске су и даље велики кругови. Лако је видети да на великом кругу који пролази кроз тачку p постоје тачке које се налазе на растојању мањем од дужине (јединствене) геодезијске линије која их спаја. Ова пример показује и да не мора да постоји крива најмање дужине која спаја две тачке, чак и ако постоји геодезијска линија која их спаја. $\sharp$

Пример 27. Антиподално пресликавање

$$a : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \qquad a(x) = -x$$

је изометрија у односу на Риманову метрику наслеђену из $\mathbb{R}^{n+1}$. Одатле следи да та Риманова метрика индукује Риманову метрику на пројективном простору $\mathbb{R}P^n$. Геодезијске линије на $\mathbb{R}P^n$ су слике великих кругова при канонској пројекцији $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$. $\sharp$

Пример 28. Посматрајмо n–димензиони простор Лобачевског у моделу полупростора

$$\mathbb{R}^n_+ \cong \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

са метриком

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}{x_n^2}.$$

Група $SO(n-1)$ дејствује на $\mathbb{R}^n_+$ као подгрупа групе $SO(n)$ која не помера x_n–осу:

$$SO(n-1) \times \mathbb{R}^n_+ \ \ni \ (A, (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \ \mapsto \ (A(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n) \ \in \ \mathbb{R}^n_+.$$

Пошто је x_n фиксирано, ово дејство је изометрично у односу на метрику Лобачевског, па слика геодезијске линије у геодезијске линије, али и x_n–осу на себе. На основу геометријског аргумента који смо већ користили у Примерима 24 и 25 закључујемо да је x_n–оса геодезијска линија. Пошто је за сваки вектор $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ транслација

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1 + a_1, \ldots, x_{n-1} + a_{n-1}, x_n)$$

изометрија простора Лобачевског, закључујемо да је свака вертикална права

$$x_1 = a_1, \quad \ldots \quad x_{n-1} = a_{n-1}$$

геодезијска линија. Рестрикција метрике Лобачевског на овакву праву је $\frac{dx_n^2}{x_n^2}$. Пошто је

$$\frac{dx_n^2}{x_n^2} \leq \frac{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}{x_n^2} = ds^2,$$

закључујемо да је свака вертикална права минимална геодезијска између произвољне две тачке на њој. Сем њих, геодезијске линије простора Лобачевског су и полукругови у $\mathbb{R}^n_+$ са границом на хиперравни $\{x_n = 0\}$ који су у граничним тачкама ортогонални на ту хиперраван. Да бисмо то показали приметимо да све изометријске трансформације *еуклидског* простора $\mathbb{R}^{n-1}$ дефинишу изометријске трансформације простора Лобачевског, фиксирајући x_n–координату. Сем тога, хомотетије

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n), \qquad \lambda > 0$$

су изометрије простора Лобачевског. Одатле се лако види да за свака два круга, ортогонална на хиперраван $\{x_n = 0\}$, постоји изометрија простора Лобачевског која преводи један од њих у други. Одатле следи да је довољно доказати да је *неки* такав полукруг геодезијска линија; из чињенице да изометрије чувају својство „бити геодезијска" тада ће да следи да је *сваки* такав полукруг геодезијска линија.

Посматрајмо сада модел геометрије Лобачевског задат полусфером (користимо нешто другачије ознаке координата него у Примеру 17)

$$\mathbb{S}^n_+ = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid x_n > 0\}$$

са метриком

$$d\sigma^2 = \frac{dx_0^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}{x_n^2}.$$

Изометрију између ова два модела успоставља пресликавање

$$\pi : \mathbb{S}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+, \qquad (x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto (2x_1/(1+x_0), \ldots, 2x_n/(1+x_0)).$$

Геометријски, пресликавање π може да се види као централна пројекција са центром у тачки $(-1, 0, \ldots, 0)$ на хиперраван

$$\{x_n = 0\} \cong \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

тј. као стереографска пројекција полусфере на полупростор[12]. Ова пројекција чува углове, па слика велике полукругове полусфере $\mathbb{S}^n_+$ на праве или полукругове полупростора $\mathbb{R}^n_+$, ортогоналне на хиперраван $\{x_n = 0\}$.

Нека је сада l произвољна вертикална права у $\mathbb{R}^n_+$. Њена инверзна слика при стереографској пројекцији, $\pi^{-1}(l)$, је велики полукруг на $\mathbb{S}^{n+1}_+$ који пролази кроз центар пројекције $(-1, 0, \ldots, 0)$. Стереографска пројекција је изометрија, па је овај полукруг геодезијска линија. Пошто ротација еуклидског простора $\mathbb{R}^{n+1}$ око z_0–осе индукује изометрију Лобачевског на $\mathbb{S}^n_+$, круг $\pi^{-1}(l)$ можемо да пресликамо на велики полукруг који не пролази кроз центар пројекције, који је такође геодезијска линија и стереографском пројекцијом се пресликава на геодезијску линију. Пошто се велики полукругови који не садрже центар пројекције пројектују у полукругове, добили смо полукруг, ортогоналан на хиперраван $\{x_n = 0\}$, који је геодезијска линија.

Пошто су вертикалне праве јединствене минималне геодезијске линије, одатле следи да су и кругови ортогонални на хиперраван $\{x_n = 0\}$ јединствене минималне геодезијске између својих тачака. Приметимо на крају да за сваке две тачке у $\mathbb{R}^n_+$ или постоји јединствени полукруг ортогоналан на $\{x_n = 0\}$ коме припадају, или обе леже на истој вертикалној правој. Одатле следи да не постоје друге геодезијске линије, сем описаних. $\sharp$

Задатак 22. Доказати да је $t \mapsto (a_1, \ldots, a_{n-1}, e^t)$ геодезијска линија у простору Лобачевског $\mathbb{R}^n_+$, а да $t \mapsto (a_1, \ldots, a_{n-1}, t)$ није. Наћи параметризацију у којој је велики круг геодезијска линија. ✓

Постојање нормалних околина на Римановој многострукости омогућава нам да докажемо следећу лему.

Лема 8. *Нека је M повезана Риманова многострукост и нека су $f, g : M \to N$ локалне изометрије. Ако је за неко $p \in M$ испуњен услов*

$$f(p) = g(p) \qquad \text{и} \qquad f_*(p) = g_*(p)$$

онда је $f \equiv g$.

$\triangle$ Нека је U нормална околина тачке p на којој су f и g дифеоморфизми. Тада за пресликавање

$$h : U \to U, \qquad h := f^{-1} \circ g$$

[12]Пресликавање π уопштава стереографску пројекцију Риманове сфере $\mathbb{C}P^1$ на затворену комплексну раван $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

важи $h(p) = p$ и $h_*(p) = \mathrm{id}$. Нека је $q \in U$ произвољна тачка и $X_p \in T_pM$ јединствени тангентни вектор такав да је $\exp_p(X_p) = q$. Пошто је h изометрија, одатле следи да је

$$h(q) = h(\exp_p(X_q)) = \exp_{h(p)}(h_*(p)\, X_p) = \exp_p(X_p) = q,$$

па је $f \equiv g$ на V. Остатак следи из повезаности M и општих тополошких аргумената. $\bigtriangledown$

2.3. Друга варијација енергије. Нека је γ геодезијска линија и γ_s, $-\delta < s < \delta$ њена глатка варијација са фиксираним крајевима: $\gamma_0(t) = \gamma(t)$ $\gamma_s(0) \equiv p$, $\gamma_s(1) \equiv q$. Из формуле прве варијације следи да је $\frac{d}{ds}\big|_{s=0} E(\gamma_s) = 0$. Израчунајмо други извод.

Тврђење 12. *Нека је γ геодезијска линија и γ_s њена глатка варијација са фиксираним крајевима. Означимо са*

$$Z(t) = \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}(t)\bigg|_{s=0}$$

векторско поље варијације. Тада је

$$\frac{d^2}{ds^2}\bigg|_{s=0} E(\gamma_s) = -2 \int_0^c \left\langle Z(t), \frac{D^2 Z}{dt^2} + R\Big(Z(t), \frac{d\gamma}{dt}\Big)\frac{d\gamma}{dt}\right\rangle dt,$$

где је R кривина.

$\bigtriangleup$ Диференцирањем формуле прве варијације (видети Тврђење 6, (40))

$$\frac{d}{ds} E(\gamma_s) = -2 \int_0^c \left\langle \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \gamma_s}{\partial t}\right\rangle dt.$$

по s добијамо

$$\frac{d^2}{ds^2} E(\gamma_s) = -2 \int_0^c \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial \gamma_s}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \gamma_s}{\partial t}\right\rangle dt - 2\int_0^c \left\langle \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}, \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial \gamma_s}{\partial t}\right\rangle dt.$$

Пошто је γ геодезијска линија, први сабирак на десној страни је једнак нули за $s = 0$. Доказ тврђења следи из Тврђења 3 на стр. 74. $\bigtriangledown$

2.4. Јакобијева поља. Нека је $\gamma : [0, c] \to M$ геодезијска линија,

$$\gamma(0) = p \quad \text{и} \quad \gamma(t) = \exp_p(tX_p) \quad \text{за} \quad X_p \in T_pM.$$

Нека је

$$]-\delta, \delta[\, \ni\ s \mapsto X_p(s)\ \in\ T_pM, \qquad X_p(0) = X_p$$

глатка крива у T_pM. Са

$$u(s, t) = \exp_p(tX_p(s))$$

је дефинисана варијација геодезијске линије $\gamma(t) = u(0, t)$, таква да је за свако $s \in]-\delta, \delta[$ крива $u(s, t)$ геодезијска линија. Одатле следи да је

$$\frac{D^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Диференцирањем ове једнакости по s и применом Тврђења 3 добијамо

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{Du}{\partial t} + R\Big(\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}\Big)\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Ако означимо поље варијације са $J(t) = \frac{\partial u}{\partial s}(0,t)$, из претходне једначине следи

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, \gamma')\,\gamma' = 0. \tag{56}$$

Дефиниција 28. Једначина (56) назива се *Јакобијевом једначином* , а векторско поље J које је задовољава *Јакобијевим пољем.*

Јакобијева једначина је обична диференцијална једначина другог реда, па је њено решење једнозначно одређено почетним условима $J(0)$ и $\frac{DJ}{dt}(0)$. Последица јединствености решења диференцијалних једначина је и следећа лема, која показује да сва Јакобијева поља настају као поља варијација геодезијских линија.

Лема 9. *Свако Јакобијево поље дуж геодезијске линије* $\gamma : [0,c] \to M$. $\gamma(0) = p$, *које има почетне услове*

$$J(0) = 0, \qquad \frac{DJ}{dt}(0) = Y_p \in T_pM$$

је поље варијације фамилије геодезијских линија

$$u(s,t) = \exp_p(tX_p(s)),$$

где је $X_p(s)$ *пут у* T_pM, *такав да је* $X_p(0) = \gamma'(0)$, $X_p'(0) = cY_p$. *Другим речима, свако Јакобијево поље* J *је задато са*

$$J(t) = (D\exp_p)_{t\gamma'(0)} tJ'(0). \tag{57}$$

Пример 29. Ако је γ геодезијска линија, $J_1(t) = \gamma'(t)$ и $J_2(t) = t\gamma'(t)$ су Јакобијева поља. За прво важи $\frac{DJ_1}{dt} \equiv 0$, и $J_1(t) \neq 0$ за све t, а за друго $\frac{DJ_2}{dt}(0) = \gamma'(0)$ и $J_2(t) = 0$ ако и само ако је $t = 0$. $\sharp$

Дефиниција 29. Тачка $\gamma(t_0)$ на геодезијској линији $\gamma : [0,c] \to M$ је *конјугована дуж* γ са тачком $p = \gamma(0)$ ако постоји Јакобијево поље J дуж γ, које није идентички једнако нули, такво да је $J(0) = J(t_0) = 0$. Максималан број таквих, линеарно независних, Јакобијевих поља назива се *вишеструкошћу* конјуговане тачке $\gamma(t_0)$. $\diamondsuit$

Задатак 23. Доказати да постоји тачно $n = \dim M$ линеарно независних Јакобијевих поља $J_1, \ldots, J_n$ дуж геодезијске линије γ, за која је $J_i(0) = 0$. Упутство: доказати да је линеарна независност Јакобијевих поља $J(t)$ еквивалентна линеарној независности почетних услова $J_1'(0), \ldots, J_n'(0)$. ✓

Вишеструкост конјуговане тачке на многострукости димензије n не може да буде већа од $n-1$, јер на њој не може да буде више од n линеарно независних Јакобијевих поља која се анулирају у две тачке, а Јакобијево поље $t\gamma'(t)$ из Примера 29 је једнако нули само за $t = 0$.

Тврђење 13. *Нека је*

$$\gamma : [0,c] \to M, \qquad \gamma(t) = \exp_p(tX_p)$$

геодезијска линија. Тачка $q = \gamma(t_0)$ *је конјугована тачки* $p = \gamma(0)$ *ако и само ако је* t_0X_p *критична тачка пресликавања* $\exp_p$.

$\triangle$ Из Леме 9, (57) следи да је

$$J(t_0) = (D\exp_p)_{t_0 X_p}(t_0 J'(0)). \tag{58}$$

Приметимо да је $J'(0) \neq 0$: у противном би из јединствености решења Јакобијеве једначине са почетним условима $J(0) = J'(0) = 0$ следило $J \equiv 0$. Одатле и из 58 следи да је $t_0 X_p$ критична тачка пресликавања $\exp_p$. $\bigtriangledown$

Задатак 24. Доказати прецизнију верзију Тврђења 13: извод $D\exp_p$ у тачки $t_0 X_p$ има језгро чија је димензија једнака вишеструкости тачке q. Упутство: користити упутство за Задатак 23. ✓

Пример 30. Ако је M Риманова многострукост са константном секционом кривином, тј. таквом да $K = K(\Sigma_p)$ не зависи од p и Σ_p (видети Напомену 7, стр. 75), онда може да се докаже, линеарно–алгебарским путем, да је њена кривина

$$R(X,Y)Z = K(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X) \tag{59}$$

(видети Напомену 8 на стр. 76). Пошто нам је познато једно Јакобијево поље γ' Јакобијеву једначину можемо да сведемо на тражење Јакобијевих поља ортогоналних на γ'. ИЗ (59) следи да је за таква поља $R(J,\gamma')\gamma' = KJ$. То значи да на многострукостима са константном секционом кривином Јакобијева једначина има облик

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + KJ = 0, \tag{60}$$

што је *једначина хармонијског осцилатора*, која може експлицитно да се реши. Пошто је интервал $[0,c]$ контрактибилан, раслојење $\gamma^* TM$ је тривијално, на основу Последице 1 на стр. 65. Пошто је J тангентно поље дуж γ, тј. сечење тривијалног раслојења $\gamma^* TM$, једначину (60) можемо да посматрамо као систем диференцијалних једначина у еуклидском простору, односно да је сведемо на једначину

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + Kx = 0,$$

простог хармонијског осцилатора у $\mathbb{R}$, чија решења зависе од знака константе K; за $K = 0$ она су линеарне функције, за $K > 0$ тригонометријске, за $K < 0$ експоненцијалне (односо хиперболичке).

Прецизније, изаберимо ортонормирану $E_1(t), \ldots, E_{n-1}(t)$ базу простора

$$\gamma'(t)^\perp \subset T_{\gamma(t)} M,$$

тако да сваки од вектора E_j буде паралелан дуж γ (тј. $\nabla_{\gamma'} E_j = 0$). Ако је секциона кривина $K = k^2 > 0$, Јакобијева поља су линеарне комбинације векторских поља $\sin(kt)E_j(t)$ и $\cos(kt)E_j(t)$, ако је $K = 0$, она су линеарне комбинације поља $tE_j(t)$, ако је $K = -k^2 < 0$ Јакобијева поља су линеарне комбинације поља $e^{\pm kt}E_j(t)$.

Тривијалан пример ових разматрања је $M = \mathbb{R}^n$ са стандардном еуклидском метриком, где је $K = 0$. Ту су геодезијске линије праве, а Јакобијева поља линеарна, па не постоје конјуговане тачке дуж геодезијских. То одговара чињеници да је $\exp_p$ дифеоморфизам за свако $p \in \mathbb{R}^n$.

Нешто сложенији пример је $M = \mathbb{S}^n$ са метриком наслеђеном из $\mathbb{R}^{n+1}$. У Примеру 21 смо видели да је секциона кривина сфере $K = 1$. Овде су геодезијске линије велики кругови, а Јакобијева поља нормална на велики круг $C(t)$ су облика $J(t) = \sin t\, E(t)$, где је $E(t)$ јединично векторско поље у $T\mathbb{S}^n$

нормално на C. Одатле видимо да се такво Јакобијево поље анулира у тачкама $t = 0$ и $t = \pi$, што значи да су антиподалне тачке конјуговане. То одговара чињеници да се геодезијске које полазе из тачке $p \in \mathbb{S}^n$ секу у антиподалној тачки $-p$; ту $\exp_p$ престаје да буде дифеоморфизам. $\sharp$

2.5. Конвексне и цеvасте околине. У Дефиницији 27 на стр. 93 смо увели појам тотално нормалних околина, које имају својство да сваке две тачке које се налазе у таквој околини, могу да се споје јединственом минималном геодезијском линијом. Приметимо да та геодезијска линија не мора да остане у тотално нормалној околини у којој леже њена почетна и крајња тачка. То илуструје следећи пример.

Пример 31. Нека је $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ цилиндар са равном метриком, тј. Римановом метриком дефинисаном стандардним наткривањем

$$\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z},$$

где је количнички простор дефинисан као простор орбита дејства транслација

$$(x, y) \mapsto (x, y + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Тада су геодезијске лопте $B]x; \rho[$, за све $x \in M$ и $\rho > 0$, тотално нормалне околине. Ако је $\pi/2 < \rho < \pi$, минимална геодезијска линија која спаја две тачке у лопти $B]x; \rho[$ излази из те лопте. $\sharp$

Дефиниција 30. Подскуп $C \subset M$ је *геодезијски конвексан* (или *строго конвексан*) ако за произвољне тачке $p, q \in C$ постоји минимална геодезијска линија γ која их спаја и лежи у C; другим речима, постоји јединствена геодезијска линија $\gamma : [0, 1] \to M$ са својствима

$$\gamma(0) = p, \qquad \gamma(1) = q, \qquad \gamma([0, 1]) \subset C,$$

чија је дужина једнака растојању између тачака p и q. Подскуп $T \subset M$ се назива *тотално конвексним* ако за произвољне тачке $p, q \in T$ све геодезијске линије које их спајају леже у T. Подскуп $L \subset M$ је *локално конвексан* ако свака тачка $p \in \overline{L}$ има геодезијски конвексну околину. $\lozenge$

Задатак 25. Описати локално конвексне, геодезијски конвексне и тотално конвексне отворене и затворене геодезијске лопте у

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

у терминима њихових полупречника (нпр. отворена лопта полупречника $\pi/2$ је геодезијски конвексна, а затворена није). $\checkmark$

Задатак 26. Описати локално конвексне, геодезијски конвексне и тотално конвексне отворене и затворене геодезијске лопте на многострукости из Примера 31. $\checkmark$

Свака тачка Риманове многострукости има геодезијски конвексну околину. Да бисмо доказали то тврђење, потребна нам је следећа лема.

Лема 10. *За сваку тачку $p \in M$ на Римановој многострукости M постоји $\rho > 0$ са својством да за $0 < r < \rho$ свака геодезијска линија која је тангентна на геодезијску сферу $S]p; r[$ у тачки $q \in S]p; r[$, лежи ван геодезијске лопте $B]p; r[$ у некој околини тачке q.*

△ Нека је V тотално нормална околина тачке p. Нека је, за $q \in V$ и вектор $X_q \in T_qM$ такав да је $\|X_q\| = 1$,

$$u(t, X_q) = \exp_p^{-1}(\gamma(t, X_q)),$$

где је $\gamma(t, X_q)$ јединствена геодезијска линија (дефинисана за довољно мало t) дефинисана почетним условима $\gamma(0) = q$, $\dot\gamma(0) = X_q$.

Нека је $F(t, X_q) := \|u(t, X_q)\|^2$ пресликавање дефинисано за t из интервала $]-\varepsilon, \varepsilon[$ и X_q из јединичне сфере у T_qM. Диференцирањем по t добијамо

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2\left\langle u, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 2\left\langle u, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\rangle + 2\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}\right\rangle. \tag{61}$$

Специјално, за $t = 0$ је

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 2\|X_q\|^2 = 2,$$

па постоји отворена околина $U \subset V$ тачке p, таква да је

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(0, X_q) > 0 \qquad \text{за} \qquad q \in U,\ X_q \in T_qM,\ \|X_q\| = 1. \tag{62}$$

Нека је $\rho > 0$, такво да је $B]p; \rho[\subset U$. Докажимо да тако изабрано ρ задовољава тврђење Леме.

Нека је $r < \rho$ и нека је $\gamma(t, X_q) = \exp_p(u(t, X_q))$ геодезијска линија тангентна на $S]p; r[$. Из прве једнакости у (61) и Гаусове леме следи да је $t = 0$ критична тачка пресликавања $t \mapsto F(t, X_q)$, а из (62) та је та критична тачка минимум. Пошто је $F(0, X_q) = r^2$, следи да је $F(t, X_q) > r^2$ за довољно мало t, што значи да је геодезијска линија $\gamma(t, X_q)$ ван лопте $B]p; r[$ у некој околини тачке q. ▽

Теорема 8. *За сваку тачку $p \in M$ Риманове многострукости M постоји $r > 0$ такво да је геодезијска лопта $B]p; r[$ геодезијски конвексна.*

△ Нека је $\rho > 0$ као у Леми 10. Изаберимо δ и V тако да су задовољени услови Теореме 7 на стр. 93. Пошто смо у доказу те теореме V конструисали после избора δ, можемо да захтевамо и додатни услов $\delta < \rho/2$. Изаберимо $r > 0$ тако да важи $B]p; r[\subset V$. Докажимо да је геодезијска лопта $B]p; r[$ геодезијски конвексна.

Пошто је V тотално нормална околина, произвољне тачке $q_1, q_2 \in B]p; r[$ могу да се споје минималном геодезијском линијом γ краћом од δ. Пошто је $r + \delta < \rho$, следи да је γ садржана у $B]p; \rho[$. Ако γ није садржана у $B]p; r[$, онда је она тангентна на неку геодезијску лопту $B]p, r_1[$ (у тачки у којој се достиже максимум растојања између p и $\gamma(t)$), за $r_1 < \rho$. То је у противречности са Лемом 10. ▽

Последица 6. (Лема о добром покривању) *Свака глатка многострукост M има покривање отвореним скуповима $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, таквим да је сваки коначан и непразан пресек*

$$U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k}$$

дифеоморфан еуклидском простору $\mathbb{R}^{\dim M}$.

△ Доказ следи из чињенице да је непразан пресек геодезијски конвексних скупова геодезијски конвексан и дифеоморфан еуклидском простору. ▽

Теорема 9. **(Теорема о цевастој околини)** *Нека је M глатка многострукост и $N \subset M$ њена глатка подмногострукост. Тада постоји отворена околина $U \supset N$ која је дифеоморфна околини нултог сечења нормалног раслојења νN.*

△ По дефиницији нормалног раслојења је

$$T_N M = \nu N \oplus TN. \tag{63}$$

Можемо да претпоставимо да је Риманова метрика тако изабрана да је ова сума ортогонална.

Експоненцијално пресликавање

$$\exp : U \to M$$

је дефинисано у некој отвореној околини U нултог сечења 0_N раслојења $T_N M$. Нека је $\exp_\nu$ његова рестрикција на $\nu N \cap U$. Пошто је сума (63) ортогонална, $\exp_\nu$ слика вектор $X_p \in \nu_p N$ у тачку геодезијске линије која је ортогонална на N у тачки $p \in N$, па је $\dim{(\exp_\nu)_*(\nu_p)} = \operatorname{rang}\nu$. Рестрикција пресликавања $\exp_\nu$ на нулто сечење $0_N \subset \nu N$ је (уз идентификацију $0_N \cong N$) идентичко пресликавање id_N, па је $\dim{(\exp_\nu)_*(0_N)} = \dim N$. Одатле, на основу Теореме о инверзној функцији, следи да је $\exp_\nu$ дифеоморфизам на некој околини нултог сечења 0_N. ▽

Последица 7. *Ако је N подмногострукост у M, онда N има околину $U \subset M$ такву да је N јак деформациони ретракт простора U.*

△ Доказ следи из чињенице да је за свако векторско раслојење E, пресликавање

$$E \ni \xi \mapsto t \cdot \xi, \qquad t \in [0,1]$$

јака деформациона ретракција тоталног простора E на нулто сечење. ▽

Последица 8. **(Теорема о крагни)** *Нека је M глатка многострукост са границом ∂M. Тада постоји отворена околина $U \supset \partial M$ дифеоморфна скупу $[0,1[\times \partial M$.*

△ Доказ може да се изведе на исти начин као доказ Теореме о цевастој околини. Или, на други начин: залепимо две копије многострукости M дуж границе ∂M и на ∂M применимо Теорему о цевастој околини. ▽

2.6. Неке глобалне особине Риманових многострукости. У Теореми 6 смо видели да геодезијске линије локално минимизују дужину, а у Примеру 26 да то тврђење, у општем случају, није глобално.

Тврђење 14. *Нека је M повезана Риманова многострукост, на којој постоји тачка p, таква да је експоненцијално пресликавање $\exp_p : T_pM \to M$ дефинисано на целом тангентном простору T_pM. Тада свака тачка $q \in M$ може да се споји са тачком p геодезијском линијом која минимизује дужину.*

△ Нека је $d_0 = d(p,q)$. Знамо да за неко $\delta > 0$ постоји геодезијска лопта B_δ полупречника δ са центром у p. Пошто је растојање непрекидна функција, а геодезијска сфера компактан скуп, постоји тачка $r \in \partial B_\delta$ која је најближа тачки q. Нека је $t \mapsto \gamma$ геодезијска линија параметризована дужином лука, која спаја $p = \gamma(0)$ и r. По претпоставци, она је дефинисана за све $t \in \mathbb{R}$. Нека је

$$I := \{s \in [\delta, d] \mid d(\gamma(s), q) = d_0 - s\}.$$

Довољно је да докажемо да је $\sup I = d_0$. Одатле онда следи $\gamma(d_0) = q$, па су тачке p и q спојене геодезијском линијом γ дужине $d_0 = d(p, q)$.

Приметимо да је $\delta \in I$ (јер је $\gamma(\delta) = r$), па је скуп I непразан. Он је и ограничен одозго и затворен, као инверзна слика нуле при непрекидном пресликавању

$$[\delta, d_0] \ni s \mapsto d(\gamma(s), q) - d_0 + s,$$

па садржи свој супремум $s_0 := \sup I \in I$. Претпоставимо да је $s_0 < d_0$. Тада постоји геодезијска лопта B_{δ_1} полубречника $\delta_1 < d_0 - s_0$ са центром у $\gamma(s_0)$. Поновимо претходни аргумент на њу. Нека је r_1 тачка на рубу лопте B_{δ_1} која је најближа тачки q. Тада је

$$d(r_1, q) = d(\gamma(s_0), q) - \delta_1. \tag{64}$$

Пошто је $s_0 \in I$, важи и

$$d(r_1, q) = d_0 - s_0 - \delta_1. \tag{65}$$

Из (64), (65) и неједнакости троугла следи

$$d(r_1, p) \geq s_0 + \delta_1.$$

Нека је сада β крива која спаја p са $\gamma(s_0)$ дуж γ, а затим $\gamma(s_0)$ са r_1 дуж јединствене минималне геодезијске линије. Дужина криве β је $s_0 + \delta_1$, па је β (минимална) геодезијска линија, тј. репараметризација криве γ. Одатле следи $r_1 = \gamma(s_0 + \delta_1)$, па је

$$d(\gamma(s_0 + \delta_1), q) = d_0 - (s_0 + \delta_1).$$

То значи да је $s_0 + \delta_1 \in I$, што је у супротности са $s_0 = \sup I$. $\bigtriangledown$

Напомена 19. Не важи тврђење обрнуто Тврђењу 14, што показује произвољан ограничен, отворен и конвексан скуп у $\mathbb{R}^n$. $\diamond$

Дефиниција 31. Риманова многострукост M је *геодезијски комплетна* ако је за све $p \in M$ пресликавање $\exp_p : T_pM \to M$ дефинисано за све $X_p \in T_pM$. Другим речима, многострукост је геодезијски комплетна ако је свака геодезијска линија $t \mapsto \gamma(t)$ на њој дефинисана за све $t \in \mathbb{R}$. $\Diamond$

Задатак 27. Користећи резултат Задатка 22 доказати да је простор Лобачевског геодезијски комплетан. ✓

Теорема 10. **(Хопф и Ринов)** *За повезану Риманову многострукост M следећа тврђења су еквивалентна:*

(1) *M је геодезијски комплетна;*
(2) *за неко $p \in M$ пресликавање $\exp_p : T_pM \to M$ је дефинисано на целом простору T_pM.*
(3) *ограничени и затворени подскупови у M су компактни;*
(4) *M је комплетна као метрички простор.*

$\bigtriangleup$ (1) $\Rightarrow$ (2) је очигледно.

Претпоставимо да важи (2). Ако је K ограничен и затворен подскуп у M, онда постоји $C > 0$, такво да је $d(p, x) < C$ за све $x \in K$. Из Тврђења 14 следи да је $K \subset \exp_p(B[0; C])$, где је $B[0; C]$ затворена лопта у T_pM. Пошто је $B[0; C]$ компактан скуп, а $\exp_p$ дифеоморфизам, следи да је $\exp_p(B[0; C])$ компактан подскуп у M, а одатле да је и његов затворен подскуп K компактан. Тиме је доказана импликација (2) $\Rightarrow$ (3).

Импликација (3) $\Rightarrow$ (4) је стандардна тополошка чињеница.

Претпоставимо да важи (4). Нека је γ геодезијска линија; не умањујући општост претпоставимо да је параметризована дужином лука, тј. да је $\|\dot\gamma\| \equiv 1$. Претпоставимо да је (a,b) максималан интервал на коме је γ дефинисана и да је $b < +\infty$. Тада постоји низ $t_n \in (a,b)$ који конвергира ка b. Пошто је $d(\gamma(t_m),\gamma(t_n)) \le |t_m - t_n|$, низ $\gamma(t_n)$ је Кошијев, па због претпоставке (4) он конвергира ка некој тачки $q \in M$. Из Тврђења 9 следи да постоји $\varepsilon > 0$ и околина V тачке q, такви да је за свако $p \in V$ и $\|X_p\| < \varepsilon$ дефинисана геодезијска линија $\alpha(t, X_p)$ на интервалу $|t| < 2$. За довољно велико n је $\gamma(t_n) \in V$ и $d(\gamma(t_n), q) < \varepsilon/3$, па је геодезијска $\alpha(t, \dot\gamma(t_n)$ дефинисана на интервалу $|t| < \varepsilon$. Из јединствености геодезијских следи да су α и γ иста геодезијска, одакле следи да је γ дефинисана за све $t < t_n + \varepsilon$, тј. ван интервала (a,b). То је контрадикција, јер смо претпоставили да је интервал (a,b) максималан. Слично се доводи до контрадикције и претпоставка $a > -\infty$. Тиме је доказана и последња импликација, (4) $\Rightarrow$ (1). $\bigtriangledown$

Последица 9. *Ако је M комплетна Риманова многострукост, сваке две тачке $p, q \in M$ могу да се споје геодезијском линијом која минимизује дужину.*

Напомена 20. На исти начин као у Напомени 19, видимо да не важи тврђење обрнуто тврђењу Последице 9. $\diamond$

Напомена 21. Теорема Хопфа и Ринова *не важи* за псеудо–Риманове многострукости – познат је пример тзв. Клифтон–Половог торуса, који је компактан, а на њему је дефинисана Лоренцова (псеудо) метрика у којој није геодезијски комплетан. $\diamond$

Пример 32. У Задатку 27 смо видели да је простор Лобачевског $\mathbb{R}^n_+$ геодезијски комплетан простор, одакле, на основу Теореме Хопфа и Ринова, следи да је он и комплетан. Иста глатка многострукост, $\mathbb{R}^n_+$, није комплетна у еуклидској метрици, тј. као потпростор у $\mathbb{R}^n$. $\sharp$

Теорема 11. *Нека је M комплетна Риманова многострукост чија секциона кривина задовољава*

$$K(\Sigma_p) \ge \frac{1}{r^2}$$

за свако $p \in M$ и сваки дводимензиони простор $\Sigma_p \subset T_pM$. Тада је M компактна, њен дијаметар није већи од $r\pi$, а њена фундаментална група $\pi_1(M)$ је коначна.

$\bigtriangleup$ Нека су $p, q \in M$ произвољне тачке, и нека је $d = d(p,q)$ њихово растојање. Из Последице 9 следи да p и q могу да се споје геодезијском линијом $\alpha : [0,1] \to M$ дужине d; тј. $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$, $\|\alpha'(t)\| \equiv d$.

Нека је $E(t) \in T_{\alpha(t)}M$ произвољно векторско поље такво да је

$$\|E(t)\| \equiv 1 \qquad \text{и} \qquad E(t) \perp \alpha'(t).$$

Посматрајмо варијацију α_s геодезијске линије α, такву да је векторско поље варијације $Z(t) = \sin(\pi t) E(t)$. Из формуле друге варијације енергије (стр. 98) и претпоставке о доњем ограничењу секционе кривине следи да је

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} E(\alpha_s) = -\int_0^1 (\pi^2 - d^2 K(\Sigma(t))) \sin^2(\pi t)\, dt \ge -\int_0^1 (\pi^2 - d^2 r^{-2} \sin^2(\pi t))\, dt, \tag{66}$$

где је $\Sigma(t)$ раван одређена векторима $\alpha'(t)$ и $E(t)$. Пошто геодезијска линија α минимизује дужину, а тиме и енергију (видети Лему 6 на стр. 86), следи да други извод (66) није мањи од нуле, тј. да је $d \leq r\pi$.

Остаје још да докажемо да је фундаментална група $\pi_1(M)$ коначна. Посматрајмо универзално наткривање $\pi : \widehat{M} \to M$. Пошто је π локални дифеоморфизам, можемо да дефинишемо метрику на $\widehat{M}$ тако да π буде локална изометрија. Тада секциона кривина многострукости $\widehat{M}$ има исту особину као и секциона кривина многострукости M, па је и $\widehat{M}$ компактна многострукост. То значи да је за свако $p \in M$ скуп $\pi^{-1}(p)$ коначан, а пошто је број елемената тог скупа једнак броју елемената фундаменталне групе, следи да је и $\pi_1(M)$ коначан скуп. $\bigtriangledown$

Напомена 22. Задатак 14 на стр. 81 показује да претходна теорема не важи под слабијим условом $K \geq 0$. Пример јединичне сфере $\mathbb{S}^2$ чији је дијаметар π, а кривина $K = 1$, показује да је оцена дијаметра у претходној теореми најбоља могућа. $\diamond$

Теорема 12. **(Адамар)** *Нека је M комплетна Риманова многострукост са секционом кривином $K(\Sigma_q) \leq 0$ за свако $q \in M$ и свако $\Sigma_q \in T_qM$. Тада је*

$$\exp_p : T_pM \to M$$

(универзално) нактривање. Специјално, ако је M просто повезана, онда је $\exp_p$ дифеоморфизам и $M \cong \mathbb{R}^n$.

$\bigtriangleup$ Пошто је M комплетна, из теореме Хопфа и Ринова следи да је за свако $p \in M$ пресликавање $\exp_p : T_pM \to M$ дефинисано на целом T_pM и сурјективно. Докажимо да је оно и локални дифеоморфизам (подсетимо се да, у општем случају, Тврђење 10 каже само да је $\exp_p$ дифеоморфизам у околини нуле). Из Теореме о инверзној функцији следи да је довољно да докажемо да $\exp_p$ нема критичних тачака, што се, захваљујући Тврђењу 10, своди на анализу Јакобијевих поља дуж геодезијских кроз p. Нека је $\gamma : \mathbb{R} \to M$ једна таква геодезијска, $\gamma(0) = p$ и J Јакобијево поље дуж γ, такво да је $J(0) = 0$. Ако двапут диференцирамо функцију

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{1}{2}\|J(t)\|^2 = \frac{1}{2}\langle J(t), J(t)\rangle \tag{67}$$

и искористимо чињеницу да J задовољава Јакобијеву једначину, а секциона кривина K услов $K \leq 0$, добијамо да је

$$f''(t) = \left\|\frac{DJ}{dt}\right\|^2 - K(\gamma', J)\|\gamma' \times J\|^2 \geq 0. \tag{68}$$

То значи да је f конвексна, ненегативна функција која задовољава $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, па је $f'(t) \geq 0$ за све t. То значи да је f неопадајућа. Из чињенице да су нуле нетривијалног Јакобијевог поља изоловане, следи да је $f(t) > 0$ за мало t, па је $J(t) \neq 0$ за све $t \neq 0$. Другим речима, не постоји тачка која је конјугована тачки p, па је $\exp_p$ локални дифеоморфизам.

Нека је $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Риманова метрика на M. Пошто је $\exp_p : T_pM \to M$ локални дифеоморфизам, са $\exp_p^*\langle\cdot,\cdot\rangle$ је дефинисана метрика на T_pM, тако да је $\exp_p$ локална изометрија.

Крај доказа је последица тврђења које издвајамо као посебну теорему. $\bigtriangledown$

Теорема 13. *Нека су* $\widetilde{M}$ *и* M *Риманове многострукости. Претпоставимо да је* $\widetilde{M}$ *комплетна и да је* $\pi : \widetilde{M} \to M$ *локална изометрија. Тада је* $(\widetilde{M}, M, \pi)$ *наткривање и* M *је комплетна.*

$\triangle$ Из комплетности $\widetilde{M}$ следи да свака геодезијска линија $\gamma : [a, b] \to M$ може да се подигне до геодезијске линије $\widetilde{\gamma} : [a, b] \to \widetilde{M}$. Прецизније, за свако $x \in \pi^{-1}(\gamma(a))$ постоји геодезијска линија $\widetilde{\gamma} : [a, b] \to \widetilde{M}$, таква да је $\widetilde{\gamma}(a) = x$ и $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ (локално, ово је последица егзистенције и јединствености решења једначине геодезијских линија са почетним условима $\widetilde{\gamma}(a) = 0$, $\widetilde{\gamma}'(a) = V_x$, где је $V_x \in T_x\widetilde{M}$ вектор јединствено одређен условом $\pi_* V_x = \gamma'(a)$; комплетност нам омогућава дефиницију $\widetilde{\gamma}$ на целом $[a, b]$).

Пошто је пресликавање π локална изометрија, оно је и локални дифеоморфизам (што се види у нормалним околинама), па из Теореме о инверзној функцији следи да је $\pi(M)$ отворен скуп. Одатле следи да је π сурјективно – у противном би постојала тачка $q \in \overline{\pi(\widetilde{M})} \setminus \pi(\widetilde{M})$. Ако је B геодезијска лопта са центром у тачки q, садржана у некој нормалној околини те тачке, постојала би тачка $p \in \pi(M) \cap B$ и јединствена минимална геодезијска линија $\gamma : [a, b] \to M$ која спаја $p = \gamma(a)$ и $q = \gamma(b)$. Пошто смо доказали да геодезијску линију можемо да подигнемо на $\widetilde{M}$, одатле следи $q = \gamma(b) = \pi \circ \widetilde{\gamma}(q) \in \pi(\widetilde{M})$.

Из доказаних својстава и Теореме Хопфа и Ринова следи да је многострукост M комплетна. Заиста, ако је γ геодезијска линија у M, она може да се подигне до геодезијске линије $\widetilde{\gamma}$ на $\widetilde{M}$. Пошто је $\widetilde{M}$ комплетна, $\widetilde{\gamma}(t)$ је геодезијска линија дефинисана за све $t \in \mathbb{R}$, па је и њена пројекција помоћу локалне изометрије π геодезијска линија на M, дефинисана за све t. Одатле следи да је M геодезијски комплетна, а самим тим и комплетна, многострукост.

Остаје да докажемо да је $\pi : \widetilde{M} \to M$ наткривање. Нека је $p \in M$ произвољна тачка и нека је B геодезијска лопта са центром p и полуречником $\delta > 0$, која лежи у нормалној околини тачке p и нека је, за свако $x \in \pi^{-1}(p)$, B_x геодезијска лопта у $\widetilde{M}$ са центром у x и полупречником δ. Тада је

$$\pi^{-1}(B) = \bigcup_{x \in \pi^{-1}(p)} B_x, \quad \text{и} \quad B_{x_1} \cap B_{x_2} = \emptyset \quad \text{за} \quad x_1 \neq x_2 \tag{69}$$

и $\pi : B_x \to B$ је дифеоморфизам за све x. Ова тврђења, која доказују да се ради о наткривању, следе из чињенице да је π локална изометрија. Заиста, прво тврђење у (69) следи из чињенице да свака тачка у V може да се споји са p минималном геодезијском линијом, и да се минималне геодезијске линије кроз p на јединствен начин подижу до минималних геодезијских линија кроз $x \in \widetilde{M}$, за свако x. Друго тврђење у (69) следи из чињенцие да би из $y \in B_{x_1} \cap B_{x_2}$ следило да y може да се споји јединственим минималним геодезијским линијама са x_1 и x_2; свака од њих би се, због изометричности π, пројектовала на минималну геодезијску линију која спаја p и $\pi(y)$ и која је јединствена, па има и јединствено подизање које пролази кроз y и има други крај у тачки $x_1 = x_2$. Чињеница да је $\pi : B_x \to B$ дифеоморфизам следи из чињенице да су $\exp_x$ и $\exp_p$ дифеоморфизми и да π, као локална изометрија, слика геодезијске линије у геодезијске линије, па је $\pi = \exp_p \circ \pi_*(x) \circ \exp_x^{-1}$, а $\pi_*(x)$ је линеарни изоморфизам, пошто је π локална изометрија. $\triangledown$

Задатак 28. Нека су M и N повезане Риманове многострукости, при чему је M комплетна, и нека је $f : M \to N$ локална изометрија. Ако сваке две тачке у N могу да се споје јединственом геодезијском линијом, доказати да је f глобална изометрија. ✓

Завршићемо ову дискусију о глобалним својствима Риманових многострукости описом многострукости константне секционе кривине. На основу Задатка 12, овај опис можемо да сведемо на случајеве $K=0$, $K=1$ и $K=-1$. У Примеру 19, видели смо да еуклидски простор има кривину 0, у Примеру 21 да сфера има секциону кривину 1 и у Примеру 22 да простор Лобачевског има секциону кривину -1. Све комплетне многострукости константне кривине су количнички простори ове три многострукости. Прецизније, важи следећа теорема.

Теорема 14. *Нека је M комплетна Риманова многострукост димензије n са константном секционом кривином $K\in\{-1,0,1\}$. Тада је универзално наткривање многострукости M изометрично*

- *простору Лобачевског $\mathbb{H}^n$ ако је $K=-1$;*
- *еуклидском простору $\mathbb{R}^n$ ако је $K=0$;*
- *сфери $\mathbb{S}^n$ ако је $K=1$.*

△ Нека нека је $\pi:\widetilde{M}\to M$ универзално наткривање. Метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на M индукује метрику $\pi^*\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\widetilde{M}$, у односу на коју $\widetilde{M}$ има константну кривину K. Нека је

$$N=\begin{cases}\mathbb{H}^n, & \text{ако је} K=-1\\ \mathbb{R}^n, & \text{ако је} K=0\\ \mathbb{S}^n, & \text{ако је} K=1.\end{cases}$$

Нека је, за $q_0\in N$ и $p_0\in\widetilde{M}$, $L:T_{q_0}N\to T_{p_0}\widetilde{M}$ линеарна изометрија векторских простора. Докажимо да је пресликавање

$$f:N\to\widetilde{M},\qquad f=\exp_{p_0}\circ L\circ\exp_{q_0}^{-1}$$

локална изометрија свуда где је $\exp_{q_0}^{-1}$ дифеоморфизам. Нека је $q\in N$ тачка у чијој околини је $\exp_{q_0}^{-1}$, а тиме и f, дифеоморфизам. Нека је $p=f(q)$, $X_q\in T_qN$ и $Y_p=f_*(q)X_q$. Пошто је многострукост N комплетна, из Последице 9 следи да, постоји јединствена геодезијске линија параметризована дужином лука, која спаја тачке q_0 и q:

$$\gamma:[0,l]\to N,\quad \gamma(t)=\exp_{q_0}(tV_{q_0}),\quad \gamma(0)=q_0,\quad \gamma(l)=q.$$

Пошто је $\exp_{q_0}^{-1}$ дифеоморфизам у околини тачке q, постоји Јакобијево поље $J(t)$ дуж $\gamma(t)$, такво да је $J(0)=0$, $J(l)=X_q$, добијено као поље варијације геодезијских линија

$$J(t)=D(\exp_{q_0})_{tV_{q_0}}(tJ'(0)).$$

Пошто је L изометрија, крива $\widetilde{\gamma}:=f\circ\gamma$ је геодезијска линија параметризована дужином лука. Нека је $W_{p_0}=L(V_{q_0})=\widetilde{\gamma}'(0)$ и $Z=L(J'(0))$. Тада је $\widetilde{J}(t):=D(\exp_{p_0})_{tW_{p_0}}(tZ)$ Јакобијево поље дуж $\widetilde{\gamma}(t)$ које задовољава $\widetilde{J}(0)$ и $\widetilde{J}'(0)=Z$. Пошто N и $\widetilde{M}$ имају исту константну кривину K, из $\|J'(0)\|=\|\widetilde{J}'(0)\|$ и $\|V_{q_0}\|=\|W_{p_0}\|$ и Јакобијевих једначина следи $\|J(l)\|=\|\widetilde{J}(l)\|$. Заиста, можемо да претпоставимо да је $J\perp\gamma$ (у супротном посматрамо Јакобијево поље $J-t\gamma'$, видети Пример 29). Диференцирањем израза $\langle\gamma',J'\rangle$ и применом Јакобијеве једначине закључујемо да је он константан, па диференцирањем израза $\langle\gamma',J\rangle$

закључујемо да је и овај израз константан и да је зато $\|\gamma' \times J\|^2 := \|\gamma'\|^2\|J\|^2 - \langle\gamma', J\rangle^2 = c_1\|J\|^2 + c_2$. Одатле и из (60) на стр. 100 и (67), (68) на стр. 106 следи да $\|J\|^2$ задовољава диференцијалну једначину првог реда, па је одређено почетним условом.

Сада из дефиниције пресликавања $f = \exp \circ L \circ \exp^{-1}$ диференцирањем добијамо

$$f_*(X_q) = f_*(J(l)) = D(\exp_{p_0})_{lW_{p_0}}(lZ) = \widetilde{J}(l).$$

Одатле закључујемо да је $\|f_*(X_q)\| = \|\widetilde{J}(l)\| = \|J(l)\| = \|X_q\|$, чиме је доказано да је f локална изометрија.

Ако је $K \in \{-1, 0\}$, из Адамарове теореме (Теорема 12) следи да је f дифеоморфизам, чиме смо завршили доказ у тим случајевима. Нека је $K = 1$, тј. $N = \mathbb{S}^n$. Тада знамо да је $\exp_{q_0} : T_{q_0} \to \mathbb{S}^n \setminus \{-q_0\}$ дифеоморфизам (видети Пример 30 на стр. 100), па из доказаног следи да је $f : \mathbb{S}^n \setminus \{-q_0\} \to \widetilde{M}$ локална изометрија. Изаберемо тачку $q_1 \in \mathbb{S}^n \setminus \{q_0, -q_0\}$. Нека је $p_1 = f(q_1)$. Дефинишемо пресликавање

$$g : \mathbb{S}^n \setminus \{-q_1\} \to \widetilde{M}, \qquad g := \exp_{p_0} \circ f_*(q_1) \circ \exp_{q_1}^{-1}.$$

Пошто је $f(q_1) = g(q_1)$, $f_*(q_1), g_*(q_1)$, из Леме 8 на стр. 97 следи да је $f \equiv g$ на повезаном скупу $\mathbb{S}^n \setminus \{-q_0, -q_1\}$. То нам омогућава да дефинишемо пресликавање

$$h : \mathbb{S}^n \to \widetilde{M}, \qquad h(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq -q_0 \\ g(x) & x \neq -q_1 \end{cases}$$

које је локална изометрија. Из Теореме 13 следи да је h наткривање. Пошто је $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$, следи да је h дифеоморфизам, дакле глобална изометрија. $\triangledown$

Последица 10. *Комплетна многострукост димензије n константне секционе кривине $K \in \{-1, 0, 1\}$ је изометрична*

- *простору $\mathbb{H}^n/\Gamma$ ако је $K = -1$;*
- *простору $\mathbb{R}^n/\Gamma$ ако је $K = 0$;*
- *простору $\mathbb{S}^n/\Gamma$ ако је $K = 1$,*

где је Γ дискретна група која дејствује тотално прекидно на M.

$\triangle$ Пресликавање π из доказа Теореме 14 је изометрија, а структурна група наткривања дејствује тотално прекидно на $\widetilde{M}$. $\triangledown$

Задатак 29. Доказати да је многострукост $\mathbb{R}^2/\Gamma$ изометрична

(а) цилиндру, ако је група Γ генерисана једном транслацијом;
(б) торусу, ако је група Γ генерисана двема транслацијама;
(в) Мебијусовој траци, ако је група Γ генерисана клизајућом рефлексијом;
(г) Клајновој флаши, ако је група Γ генерисана клизајућом рефлексијом и транслацијом. ✓

3. Главна раслојења

3.1. Море–Картанова форма. Нека је G Лијева група. За свако $g \in G$ дефинисане су *лева и десна транслација*

$$L_g, R_g : G \to G, \qquad L_g(x) = gx, \qquad R_g(x) = xg.$$

Ова пресликавања су дифеоморфизми: $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$, $R_g^{-1} = R_{g^{-1}}$. Лева и десна транслација комутирају, $R_g \circ L_h = L_h \circ R_g$, али две леве (или две десне) транслације у општем случају не комутирају, ако група G није Абелова.

Захваљујући присуству структуре групе, Лијеве групе су паралелизабилне многострукости (подсетимо се да то значи да су им тангентна раслојења тривијална). Тривијализацију можемо да конструишемо помоћу извода леве транслације:

$$G \times T_eG \to TG, \qquad (g, X_e) \mapsto (L_g)_*X_e \tag{70}$$

је изоморфизам векторских раслојења. Тангентни простор T_eG Лијеве групе у јединици називамо *Лијевом алгебром* Лијеве групе G и означавамо са

$$\mathfrak{g} := T_eG,$$

па (70) пишемо

$$G \times \mathfrak{g} \to TG, \qquad (g, X_e) \mapsto (L_g)_*X_e \tag{71}$$

Назив *Лијева алгебра* сугерише да векторски простор $\mathfrak{g}$ има структуру алгебре; заиста, множење на њему је пресликавање

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \tag{72}$$

дефинисано на следећи начин. Ако су $X_e, Y_e \in \mathfrak{g} = T_eG$ два тангентна вектора, са $X_g := (L_g)_*X_e$, $Y_g := (L_g)_*Y_e$ су дефинисана векторска поља $X, Y : G \to TG$. Дефинишимо

$$[X_e, Y_e] := [X, Y]_e,$$

где је на десној страни вредност комутатора векторских поља X и Y у јединици. Из особина Лијевих заграда векторских поља следи да је множење (72) билинеарно, антикомутативно и задовољава Јакобијев идентитет (видети (11) на стр. 12).

Пример 33. У Примеру 8 смо видели да је тангентно раслојење торуса $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ тривијално:

$$T\mathbb{T}^n \cong \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Сада то видимо и као специјални случај паралелизабилности Лијевих група. Лијева алгебра Лијеве групе $G = \mathbb{S}^1$ је комутативна алгебра $(\mathbb{R}, \cdot, +, \cdot)$; Лијева алгебра торуса је производ $(\mathbb{R}^n, \cdot, +, \cdot)$. ♯

Пример 34. Лијева алгебра специјалне ортогоналне матричне групе

$$SO(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid AA^T = A^TA = E, \det A = 1\}$$

је

$$\mathfrak{so}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A + A^T = 0\}.$$

Да бисмо ово видели, довољно је да диференцирамо израз $A_tA_t^T = E$ у тачки $t = 0$. Применом Лајбницовог правила закључујемо да је свака матрица из Лијеве алгебре $\mathfrak{so}(n)$ антисиметрична. Да се ова два векторска простора, простор антисиметричних матрица и $\mathfrak{so}(n)$ поклапају видимо из поређења њихових димензија: димензија простора антисиметричних матрица је $n(n-1)/2$ (јер је антисиметрична матрица одређена елементима испод главне дијагонале) и једнака је димензији многострукости $SO(n)$, која је инверзна слика $f^{-1}(E)$ регуларне тачке пресликавања $f(X) = XX^T$ простора матрица са позитивном детерминантом у простор симетричних матрица.

Лијева заграда на $\mathfrak{so}(n)$ (као и на било којој матричној групи) се подудара са комутатором матрица

$$[A, B] = AB - BA. \tag{73}$$

Специјално, на векторском простору $\mathbb{R}^3$ еуклидски векторски производ

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

дефинише билинеарно и антикомутативно множење које задовољава Јакобијев идентитет; тако дефинисана Лијева алгебра $(\mathbb{R}^3, \cdot, +, \times)$ је изоморфна Лијевој алгебри $\mathfrak{so}(3)$ Лијеве групе $SO(3)$. Ово се види директном провером: се матрице $A \in \mathfrak{so}(3)$ су облика

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ако њих идентификујемо са векторима $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, лако проверавамо да векторски производ одговара множењу (73). $\sharp$

Инверз пресликавања (71) можемо да компонујемо са пројекцијом на другу компоненту, чиме добијамо диференцијалну 1–форму са вредностима у $\mathfrak{g}$, тј. пресликавање

$$\theta_G : TG \to \mathfrak{g}$$

чија је рестрикција $\theta_G(g) : T_gG \to \mathfrak{g}$ линеарно пресликавање за свако $g \in G$. Њу издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 32. Диференцијална 1–форма

$$\theta_G : TG \to \mathfrak{g}$$

добијена композицијом инверза пресликавања (71) са пројекцијом на другу компоненту назива се *Море–Картановом формом* Лијеве групе G. $\Diamond$

Диференцијалне k–форме са вредностима у коначно димензионом векторском простору V означаваћемо са $\Omega^k(M; V)$; то је специјални случај дефиниције (33) на стр. 83, за случај тривијалног раслојења. Приметимо да је

$$\Omega^k(M; V) = \Omega^k(M) \otimes V.$$

Спољашњи диференцијал

$$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

се праволинијски уопштава на

$$d : \Omega^k(M; V) \to \Omega^{k+1}(M; V),$$

као што се диференцирање скаларних функција продужава на диференцирање функција са векторским вредностима, диференцирањем сваке координате[13]. Са спољашњим множењем је ствар мало сложенија. Спољашњи производ обичних диференцијалних форми $\wedge : \Omega^j(M) \times \Omega^k(M) \to \Omega^{j+k}(M)$ је дефинисан са

$$\lambda \wedge \nu(X_1, \ldots, X_{j+k}) := \sum_\sigma (-1)^{\mathrm{sgn}\sigma} \lambda(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(j)}) \nu(X_{\sigma(j+1)}, \ldots, X_{\sigma(j+k)}), \tag{74}$$

[13]Или, без координата, са $d(\lambda \otimes v) = (d\lambda) \otimes v$. Приметимо да нам у случају фиксираног векторског простора V (или, другим речима, тривијалног раслојења) за ово није потребна конексија, као и да овако дефинисан диференцијал задовољава $d^2 = 0$.

где се сумира по свим пермутацијама $\sigma : \{1, \dots, j+k\} \to \{1, \dots, j+k\}$ и где $\operatorname{sgn}\sigma$ означава знак пермутације (парност транспозиција у представљању пермутације као композиције транспозиција). Овде је на десној страни искоришћено множење скалара, које не постоји у општем случају у векторском простору. За форме са вредностима у векторском простору, спољашње множење можемо да дефинишемо као пресликавање

$$\wedge : \Omega^j(M;V) \times \Omega^k(M;V) \to \Omega^{j+k}(M; V \otimes V), \tag{75}$$

тако што уместо суме у (74) ставимо

$$\sum_\sigma (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} \lambda(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(j)}) \otimes \nu(X_{\sigma(j+1)}, \dots, X_{\sigma(j+k)}).$$

Међутим, ако на је на векторском простору дефинисано и билинеарно множење $m : V \times V \to V$ или, еквивалентно, линеарно пресликавање

$$m : V \otimes V \to V$$

оно дефинише множење

$$\widetilde{m} : \Omega^{j+k}(M; V \otimes V) \to \Omega^{j+k}(M;V), \quad \widetilde{m}(\nu)(X) \otimes (v \otimes w) := \nu(X) \otimes m(v \otimes w). \tag{76}$$

Композиција пресликавања (75) и (76), коју (да бисмо избегли сувише ознака) означавамо истим словом m, је пресликавање

$$m = \widetilde{m} \circ \wedge : \Omega^j(M;V) \times \Omega^k(M;V) \to \Omega^{j+k}(M;V).$$

Пример 35. Нека су $\lambda, \nu \in \Omega^1(M) \otimes \mathfrak{g}$ диференцијалне 1–форме на многострукости M са вредностима у Лијевој алгебри $\mathfrak{g}$. Тада је

$$[\lambda, \nu]\,(X,Y) = [\lambda(X), \nu(Y)] + [\nu(X), \lambda(Y)].$$

Специјално, за $\lambda = \nu$,

$$[\lambda, \lambda]\,(X,Y) = 2[\lambda(X), \lambda(Y)].$$

Доказ остављамо као задатак. ♯

Свако $g \in G$ дефинше изоморфизам (конјугацију)

$$C_g = L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g : G \to G, \qquad x \mapsto gxg^{-1},$$

који слика e у e, па је његов извод у тачки e линеарно пресликавање

$$\operatorname{Ad}(g) := (C_g)_*(e) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}.$$

Приметимо да је $(x,g) \mapsto C_g(x)$ лево дејство групе G на себи, па је

$$\operatorname{Ad} : G \to GL\,(\mathfrak{g}) \tag{77}$$

репрезентација групе[14] G на $\mathfrak{g}$; називамо је *адјунгованом репрезентацијом.*

Задатак 30. Доказати да је

$$[X_e, Y_e] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \operatorname{Ad}(x(t)) Y_e,$$

где је $x(t)$ било који пут, такав да је $x(0) = e$ и $\frac{dx}{dt}(0) = X_e$. Користећи овај израз, доказати формулу (73) на стр. 111. ✓

[14] *Репрезентација групе* G на векторском простору V је хомоморфизам $G \mapsto GL\,(V)$ те групе у групу инвертибилних линеарних пресликавања $V \to V$.

Тврђење 15. *Море–Картанова форма* $\theta_G \in \Omega^1(G) \otimes \mathfrak{g}$ *има следећа својства:*

(1) $L_g^*\theta_G = \theta_G$, *тј.* θ_G *је лево инваријантна;*
(2) $R_g^*\theta_G = \mathrm{Ad}(g^{-1})\theta_G$*;*
(3) $d\theta_G + \frac{1}{2}[\theta_G, \theta_G] = 0$.

$\triangle$ Нека је $h \in G$ произвољна тачка у G и $X_h \in T_hG$ произвољан тангентни вектор у тој тачки. По дефиницији Море–Картанове форме је

$$\theta_G(X_h) = (L_{h^{-1}})_* X_h.$$

Слично, за вектор $(L_g)_*(X_h) \in T_{gh}G$ је

$$\theta_G((L_g)_* X_h) = (L_{(gh)^{-1}})_*(L_g)_* X_h.$$

Ова два израза доказују прво тврђење, јер је

$$L_g^*\theta_G(X_h) = \theta_G((L_g)_* X_h) = (L_{(gh)^{-1}})_*(L_g)_* X_h = (L_{h^{-1}})_* X_h = \theta_G(X_h).$$

Слично се доказује и друго тврђење:

$$\begin{aligned} R_g^*\theta_G(X_h) &= \theta_G((R_g)_* X_h) = (L_{(hg)^{-1}})_*(R_g)_* X_h = \\ &= (L_{g^{-1}} \circ R_g)_*(L_{h^{-1}})_* X_h = \mathrm{Ad}(g^{-1})\theta_G(X_h). \end{aligned}$$

За доказ трећег тврђења искористићемо формулу

$$d\theta_G(X, Y) = X\theta_G(Y) - Y\theta_G(X) - \theta_G([X, Y]) \tag{78}$$

(Лема 1 на стр. 24). Лева страна зависи само од вредности векторских поља X и Y у тачки. Изаберимо та поља тако да буду лево инваријантна (проширимо их из једне тачке на G изводом леве транслације). Тада су $\theta_G(X)$ и $\theta_G(Y)$ константе, па су прва два сабирка на десној страни (78) једнака нули. Пошто је $(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y]$ (Теорема 8 на стр. 12), следи и да је $[X, Y]$ лево инваријантно векторско поље, па је, по дефиницији Море–Картанове форме, трећи сабирак у (78)

$$\theta_G([X, Y]) = [X, Y]_e = [X_e, Y_e] = [\theta_G(X), \theta_G(Y)]$$

(прве две Лијеве заграде у претходном ланцу једнакости су Лијеве заграде векторских поља, а друге две Лијеве заграде у $\mathfrak{g}$). Одатле следи да је $d\theta_G(X, Y) + \theta_G([X, Y]) = 0$, што значи (видети Пример 35) $d\theta_G + \frac{1}{2}[\theta_G, \theta_G] = 0$. $\triangledown$

Последица 11. *Дистрибуција* $\ker\theta_G$ *је интеграбилна.*

$\triangle$ Доказ следи из $d\theta_G + \frac{1}{2}[\theta_G, \theta_G] = 0$ и Фробенијусове теореме. $\triangledown$

3.2. Конексије на главним раслојењима. Векторска раслојења су специјални случај општијег појма *раслојења*, који се формално дефинише као уређена четворка (E, M, F, π), где су E, M, и F тополошки простори, а $\pi : E \to M$ непрекидно пресликавање, такво да за сваку тачку $e \in E$ постоји отворена околина $U \subset M$ тачке $\pi(e) \in M$ и хомеоморфизам

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F,$$

такав да је $p_1 \circ \varphi = \pi$, где је $p_1 : U \times F \to U$ пројекција на прву координату. Простор E називамо *тоталним простором раслојења* (или, некад, само *раслојењем*), M *базом* и F *слојем* или *влакном*, а пресликавање π пројекцијом.

Појмови као изоморфизам раслојења, тривијална раслојења и сечења дефинишу се на очигледан начин, као код векторских раслојења.

У категорији глатких многострукости говоримо о глатким раслојењима (чак и ако испустимо реч „глатки”), имајући у виду да су сви објекти у овој дефиницији глатки.

Видели смо да, ако је G Лијева група и H њена затворена Лијева подгрупа, онда количнички простор G/H (нпр. десног) дејства групе H на G има структуру глатке многострукости. Четворка $(G, G/H, H, \pi)$ је тада пример глатког раслојења које, сем структуре раслојења, има и природно дефинисано дејство групе H на тоталном простору G, које чува влакна. Овај пример уопштавамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 33. *Главно раслојење* је уређена петорка (P, M, F, π, G) где је (P, M, F, π) раслојење, а G Лијева група која десно дејствује на простору P, при чему то дејство чува слојеве и на сваком од слојева је слободно и транзитивно. Група G назива се *структурном групом* (P, M, F, π, G) главног раслојења. Пошто G дејствује слободно и транзитивно на F, влакна F су дифеоморфна многострукости G. Такви простори, који су дифеоморфни Лијевој групи G, али немају структуру групе, називају се *G–торзорима*[15]. $\diamondsuit$

Некада главно раслојење означавамо дијаграмом

$$\begin{array}{ccc} G & \to & P \\ & & \downarrow \\ & & M. \end{array}$$

Пошто је дејство G на P слободно и чува влакна, простор орбита P/G је дифеоморфан бази M.

Дефиниција 34. Нека је P главно раслојење са структурном Лијевом групом G, чија је Лијева алгебра $\mathfrak{g}$, и нека је, за $p \in P$,

$$\sigma_p : G \to P, \qquad \sigma_p(g) = p \cdot g$$

пресликавање дефинисано десним дејством G на P. Тада је за сваки вектор $\xi \in T_eG = \mathfrak{g}$ са

$$\widehat{\xi}_p := (\sigma_p)_* \xi \in T_pP$$

дефинисано вертикално векторско поље[16] $\widehat{\xi}$ на P, које називамо *фундаменталним векторским пољем* придруженим вектору ξ. $\diamondsuit$

Пример 36. Видели смо да је, ако је G Лијева група и H њена затворена Лијева подгрупа, петорка $(G, G/H, H, \pi, H)$ једно главно раслојење са структурном групом H. $\sharp$

Пример 37. Наткривање $\pi : \widetilde{M} \to M$ дефинише главно раслојење са тоталним простором $\widetilde{M}$, базом M, дискретним слојем и структурном групом $G \equiv \pi_1(M)/\pi_*(\pi_1(\widetilde{M}))$. Специјално, универзално наткривање је наткривање са просто повезаним тоталним простором и структурном групом $\pi_1(M)$. $\sharp$

Пример 38. Пресликавање $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $(x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$, дефинише универзално наткривање торуса. $\sharp$

---

[15] Афини простор моделован над векторским простором V је пример G–торзора, где је G адитивна Абелова група простора V.

[16] Као и у случају векторских раслојења, вектор $X_p \in T_pP$ називамо *вертикалним* ако је $\pi_*(X_p) = 0$, где је $\pi : P \to M$ пројекција из дефиниције раслојења P.

Пример 39. Наткривајуће пресликавање

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad z \mapsto e^z$$

дефинише наткривање $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^*, \exp, \mathbb{Z})$. Инверзно пресликавање, логаритам, је вишезначно на $\mathbb{C}^*$, али је једнозначно на универзалном наткривању простора $\mathbb{C}^*$, које се назива *Римановом површи логаритма* и конструише на начин познат из Комплексне анализе, изрезивањем комплексне равни дуж осе кроз координатни почетак и лепљењем. Наткривање $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^*, \exp, \mathbb{Z})$ је изоморфно наткривању $(\mathbb{R}^2, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \pi, \mathbb{Z})$, где је $\pi(x, y) = (e^{2\pi i x}, y)$. ♯

Пример 40. Пресликавање

$$\pi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \qquad z \mapsto z^n$$

дефинише наткривање $(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*, \pi, \mathbb{Z}_n)$. Његово инверзно пресликавање $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ је вишезначно пресликавање на $\mathbb{C}^*$, али једнозначно на *Римановој површи n–тог корена*, тј. наткривању пробушене комплексне равни $\mathbb{C}^*$ са структурном групом $\pi_1(\mathbb{C}^*)/n\pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$. ♯

Пример 41. Мултипликативна група $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ дејствује на $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ по правилу

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \ \ni \ (t, x) \mapsto t \cdot x \ \in \ \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}.$$

Ово дејство је слободно, глатко и транзитивно на орбитама. Простор орбита је реални пројективни простор $\mathbb{R}P^n$. Тако смо добили реални пројективни простор као базу главног раслојења са структурним групом $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Сетимо се да смо у Примеру 19 на стр. 31 видели реални пројективни простор као базу главног раслојења са структурним групом $\mathbb{Z}_2$, тј. као базу наткривања.

Слично, комплексни пројективни простор $\mathbb{C}P^n$, који смо у Примеру 19 на стр. 31 видели као базу главног раслојења са структурним групом $\mathbb{S}^1$, може да се види и као главно раслојење са структурним групом $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Класу еквиваленције тачке $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \subset \mathbb{K}^{n_1}$ у пројективном простору $\mathbb{K}P^n$ означавамо са $[a_0 : a_1 : \ldots : a_n]$, ове координате означавамо *хомогеним координатама.* ♯

Пример 42. **(Хопфово раслојење)** У Примеру 19 на стр. 31 смо видели да се пројективни простор $\mathbb{C}P^n$ реализује као простор орбита дејства мултипликативне групе $\mathbb{S}^1$ јединичних комплексних бројева на $\mathbb{S}^{2n+1}$. Тиме је дефинисано главно раслојење

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{S}^{2n+1} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{C}P^n. \end{array}$$

Ова раслојења називамо *Хопфовим раслојењима.* Специјално, за $n = 1$ је $\mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^2$ $([\xi : \eta] \mapsto \xi/\eta)$, па имамо главно раслојење

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{S}^3 \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{S}^2. \end{array} \tag{79}$$

Ако тродимензиону сферу посматрамо у амбијенту $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$, као хиперповрш задату једначином $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, Хопфово раслојење можемо да видимо као пресликавање

$$\pi : S^3 \to \mathbb{S}^2 \cong \mathbb{C}P^1, \qquad (z_1, z_2) \mapsto \frac{z_2}{z_1}.$$

За свако $[\xi : \eta] \in \mathbb{C}P^1$, инверзна слика $\pi^{-1}([\xi : \eta])$ је велики круг на $\mathbb{S}^3$. Инверзне слике различитих тачака су уланчани кругови. То може да се види ако се сфера посматра као унија $\mathbb{S}^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, уз помоћ стереографске пројекције

$$\rho_n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_n}, \frac{x_2}{1-x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{1-x_n}\right).$$

Тада је, нпр, $\rho_3 \circ \pi \circ \rho_2^{-1}(1,0,0)$ оса x_1 у $\mathbb{R}^3$, а $\rho_3 \circ \pi \circ \rho_2^{-1}(-1,0,0)$ јединични круг у равни (x_2, x_3). Тачкама $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ са $|x_1| \neq 1$ одговарају кругови сфере $|z_1|^2 + |z_2|^2$ на којима је $z_1 + 1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ и који су међусобно дисјунктни и уланчани.

Тако добијамо разлагање простора $\mathbb{R}^3$ на унију фамилије уланчаних кругова и једне праве. У $\mathbb{S}^3$ се и та једна права види као круг, па добијамо разлагање сфере $\mathbb{S}^3$ на уланчане кругове. Раздвајањем на две подфамилије ових кругова, добијамо $\mathbb{S}^3$ као унију два пуна торуса $D^2 \times \mathbb{S}^1$. $\sharp$

Задатак 31. Посматрајмо сферу $\mathbb{S}^3 \in \mathbb{R}^4$ као скуп јединичних кватерниона:

$$\mathbb{S}^3 \cong \{q = q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k} \mid |q| = 1\}.$$

(а) Доказати да је $\mathbb{S}^3$ Лијева група у односу на операцију множења кватерниона.

(б) Поистоветимо тачку $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ са чисто имагинарним кватернионом $p = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Доказати да је за свако $q \in \mathbb{S}^3$ са

$$R_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad R_q(p) = qpq^{-1} = qp\bar{q},$$

где је множење на десној страни множење кватерниона, дефинисана ротација простора $\mathbb{R}^3$ са центром у координатном почетку.

(в) Доказати да је у (б) дефинисан хомоморфизам Лијевих група

$$\rho : \mathbb{S}^3 \to SO(3)$$

и да је $\ker \rho = \{-1, 1\}$.

(г) Фиксирајмо тачку $p_0 = (1,0,0) \in \mathbb{S}^2$. Доказати да је са

$$\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2, \qquad \pi(q) := R_q(p_0) = q\mathbf{i}\bar{q}$$

дефинисано Хопфово раслојење помоћу кватерниона. ✓

Задатак 32. Објаснити како су дефинисана Хопфова раслојења

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{S}^0 & \to & \mathbb{S}^1 & & \mathbb{S}^3 & \to & \mathbb{S}^7 & & \mathbb{S}^7 & \to & \mathbb{S}^{15} \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & \mathbb{S}^1 & & & & \mathbb{S}^4 & & & & \mathbb{S}^8. \end{array} \tag{80}$$

Упутство: сем реалних и комплексних пројективних простора постоје и кватернионски пројективни простори, пошто је релација еквиваленције „припадати истој правој" изведена из асоцијативности множења. Та релација *није* добро дефинисана са Кејлијевим бројевима, тј. алгебром октава $\mathbb{R}^8$, која је неасоцијативна. Међутим, добро су дефинисани појмови октанионске пројективне праве и пројективне равни. Октанионска пројективна права је дефинисана на исти начин као реална, комплексна или кватернионска, јер је $(x, y) \sim (1, yx^{-1})$ добро дефинисана релација еквиваленције, када су x и y различити од нуле[17]. Раслојења (79) и (80) одговарају реалним, комплексним, кватернионским и октанионским пројективним правама, које су дифеоморфне сферама одговарајућих димензија. Приметимо да последње раслојење у (80) није главно раслојење, јер $\mathbb{S}^7$ није група – множење јединичних октава дефинише на $\mathbb{S}^7$ множење које има неутрални елемент и у односу на које сваки елемент има инверз, али множење није асоцијативно. ✓

Напомена 23. Познато је (на основу резултата Ф. Адамса) да су (79) и (80) јединa раслојења којима су база, слој и тотални простор сфере. ◇

Пример 43. **(Простор твистора)** Алгебра $\mathbb{H}$ кватерниона је генерисана базом $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ над $\mathbb{R}$, али и базом $1, \mathbf{j}$ над $\mathbb{C}$: сваки кватернион $q \in \mathbb{H}$ има једнозначан запис $q = z_1 + z_2\mathbf{j}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Тако тачка $\mathbb{H}^2 \setminus \{0\}$ одговара јединственој тачки $\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$, па су на скупу

$$\mathbb{H}^2 \setminus \{0\} \cong \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$$

дефинисана два дејства: множење кватернионима и множење комплексним бројевима. Орбите другог дејства су уједно и орбите првог, али не и обрнуто. Орбите првог дејства су тачке кватернионске пројективне праве $\mathbb{H}P^1 \cong \mathbb{S}^4$, а орбите другог тачке комплексног пројективног простора $\mathbb{C}P^3$. Тако добијамо раслојење

$$\mathbb{C}P^3 \to \mathbb{S}^4$$

Ово раслојење назива се *простором твистора над сфером* $\mathbb{S}^4$. Твисторе је увео Роџер Пенроуз као модел простора у теорији квантне гравитације[**46**]. Они су значајни и у диференцијалној топологији четвородимензионих многострукости, јер омогућавају изучавање неких питања диференцијалне геометрије сфере $\mathbb{S}^4$ методама комплексне пројективне геометрије. ♯

Пример 44. Нека је E векторско раслојење ранга r над базом M. За $x \in M$ означимо са P_x скуп свих *уређених база* векторског простора E_x. Приметимо да група $GL(r, \mathbb{K})$ дејствује глатко, десно, слободно и транзитивно на P_x. Заиста, сваку уређену базу у E_x можемо да схватимо као линеарни изоморфизам

$$e : \mathbb{K}^r \to E_x,$$

па је дејство групе $GL(r, \mathbb{K})$ на P_x дефинисано са

$$GL(r, \mathbb{K}) \times P_x \ \ni \ (g, e) \mapsto e \circ g \ \in \ P_x.$$

Унија

$$P = \bigcup_{x \in M} P_x$$

има природно дефинисану структуру глатког раслојења: ако је (U, φ) тривијализација раслојења E_U, онда је са

$$\psi_U : P_U \to U \times GL(r, \mathbb{K}), \quad \psi(x, e) = (x, \varphi \circ e)$$

дефинисана тривијализација P_U над скупом $U \subset M$. На тај начин је дефинисано главно раслојење P над M, које се назива *раслојењем уређених база* векторског раслојења E. ♯

[17]Дефиниција октанионске пројективне равни захтава мало другачију конструкцију – релација еквиаленције се дефинише на уређеним тројкама (x, y, z) октава које имају бар једну реалну координату; октанионска пројективна раван је количнички простор те релације.

Дефиниција 35. Нека је P главно раслојење над базом M са структурном групом G и нека је S многострукост на којој је дефинисано глатко лево дејство групе G, односно хомоморфизам група

$$\rho : G \to \mathrm{Dif}\,(S).$$

Придружено раслојење

$$\begin{array}{ccc} S & \to & P \times_\rho S \\ & & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

одређено дејством ρ је раслојење чији је тотални простор $P \times_\rho S$ простор орбита десног дејства

$$(g, (p, \xi)) \mapsto (p \cdot g, \rho(g^{-1})\xi),$$

за $g \in G$, $p \in P$ и $\xi \in S$. Специјално, ако је $S = \mathbb{K}^r$ векторски простор, а $\rho : G \to GL(r, \mathbb{K})$ репрезентација групе g, онда је $E = P \times_\rho \mathbb{K}^r$ векторско раслојење ранга r над базом M. $\diamondsuit$

Приметимо да је Пример 44 специјални случај претходне дефиниције, са $G = GL(r, \mathbb{K})$ и тривијалним дејством $\rho : GL(r, \mathbb{K}) \to GL(r, \mathbb{K})$. На тај начин, главна раслојења су општији појам од векторских.

Пример 45. Ако је P главно раслојење над базом M, са структурном групом G, адјунгована репрезентација (77) дефинише векторско раслојење $P \times_{\mathrm{ad}} \mathfrak{g}$, које називамо *адјунгованим раслојењем* главног раслојења P. $\sharp$

Дефиниција 36. Нека је P главно раслојење над базом M, са структурном Лијевом групом G, и нека је $\mathfrak{g}$ њена Лијева алгебра. *Форма конексије* на P је диференцијална 1–форма $\theta \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ на P, са вредностима у $\mathfrak{g}$, која има следећа два својства:

(1) $R_g^* \theta = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \theta$;
(2) $\theta(\widehat{\xi}) = \xi$ за све $\xi \in \mathfrak{g}$,

где је $\widehat{\xi}$ фундаментално векторско поље на P придружено вектору $\xi \in \mathfrak{g}$. $\diamondsuit$

Ако је θ форма конексије на главном раслојењу $\pi : P \to M$, са $H_p := \ker \theta_p$ је дефинисана глатка дистрибуција на TP, која је *хоризонтална*, тј. комплементарна *вертикалној дистрибуцији*

$$V_p := \ker \pi_*(p) \ \subset \ T_p P.$$

Као и код векторских раслојења, примећујемо да је вертикална дистрибуција канонски задата, док хоризонтална није. Из два својства из дефиниције форме конексије следи да хоризонтална дистрибуција $H_p := \ker \theta_p$ има следећа два својства:

(1) $H_{p \cdot g} = (R_g)_* H_p$;
(2) $T_p P = H_p \oplus V_p$.

Свака хоризонтална дистрибуција H на TP која има ова два својства назива се *конексијом* на главном раслојењу P.

Присуство конексије омогућава нам да дефинишемо *хоризонталну пројекцију*

$$h : TP = H \oplus V \to H. \tag{81}$$

Дефиниција 37. Нека је на главном раслојењу P задата форма конексије θ. *Коваријантни извод* диференцијалних k–форми са вредностима у векторском простору V је композиција

$$d_\theta := d \circ h : \Omega^k(P;V) \to \Omega^{k+1}(P;V)$$

где је $d : \Omega^k(P;V) \to \Omega^{k+1}(P;V)$ стандардни спољашњи диференцијал, а h хоризонтална пројекција (81). $\Diamond$

За разлику од обичног спољашњег диференцијала d, који задовољава једначину $d \circ d = 0$, која је полазна тачка де Рамове кохомолошке теорије, за коваријантни извод је, у општем случају $d_\theta \circ d_\theta \neq 0$.

Дефиниција 38. *Кривина* дефинисана формом конексије θ је диференцијална 2–форма $\omega := d_\theta \theta \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$. $\Diamond$

Тврђење 16. *Ако је θ форма конексије на главном раслојењу, и $\omega = d_\theta \theta$ њена кривина, онда је*

$$\omega = d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta] \qquad и \qquad d_\theta \omega = d_\theta^2 \theta = 0.$$

Друга једнакост је позната под именом Бјанкијев идентитет, њен еквивалентан запис је $d\omega = [\omega, \theta]$.

$\triangle$ Доказ, који се изводи применом Леме 1 на стр. 24, изостављамо. $\bigtriangledown$

Напомена 24. Нека је $E = P \times_\rho \mathbb{K}^r$ векторско раслојење придружено главном раслојењу P, као у Дефиницији 35. Својство $R_g^* \theta = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ \theta$ форме конексије (односно, инваријантност конексије H у односу на десно дејство групе G) нам омогућава да, помоћу конексије и кривине на P, дефинишемо конексију и кривину на E. Коваријантни извод векторских поља тако дефинисане конексије на E добија се помоћу коваријантног извода 0–форми са вредностима у E из Дефиниције 37. Пројекција на хоризонталну компоненту у тој дефиницији одговара чињеници да се коваријантни извод сечења на E дефинише у правцу вектора из TM. $\diamond$

Као и у случају векторских раслојења, и код главних раслојења кривина је опструкција интеграбилности хоризонталне дистрибуције:

Теорема 15. *Кривина дефинисана конексијом (тј. хоризонталном дистрибуцијом) H је једнака нули ако и само ако је H интеграбилна дистрибуција.*

$\triangle$ Доказ остављамо као задатак. $\bigtriangledown$

ГЛАВА 2

Симплектичке и контактне многострукости

У Глави 1 смо, између осталог, говорили о (псеудо) Римановим многострукостима. На тангентним просторима тих многострукости задата је билинеарна форма, (псеудо) Риманова метрика, која је *симетрична* и *недегенерисана.* Билинеарна форма

$$\beta : V \times V \to \mathbb{R}$$

на векторском простору V је симетрична ако за све векторе $v, w \in V$ важи $\beta(v, w) = \beta(w, v)$, а недегенерисана ако за сваки вектор $v \in V \setminus \{0\}$ постоји вектор $w \in V$ за који је $\beta(v, w) \neq 0$. На просторима коначне димензије, билинеарна форма је недегенерисана ако и само ако је пресликавање

$$i : V \to V^*, \qquad\qquad i(v)(w) := \beta(v, w)$$

изоморфизам. Заиста, услов недегенерисаности еквивалентан је инјективности овог пресликавања, а пошто је $\dim V = \dim V^*$ инјективност, сурјективност и бијективност линеарног пресликавања $V \to V^*$ су еквивалентна својства.

Ако је V векторски простор коначне димензије и $W \subset V$ његов потпростор, његов β–ортогонални комплемент је потпростор

$$W^\beta := \{v \in V \mid i(v)(W) = \{0\}\}. \tag{1}$$

Ако је форма β недегенерисана, онда је

$$\dim W + \dim W^\beta = \dim V, \qquad \text{и} \qquad (W^\beta)^\beta = W. \tag{2}$$

Заиста, $i(W^\beta) = W^\perp$, где је $W^\perp \subset V^*$ анихилатор потпростора $W \subset V$. Пошто је пресликавање $i : V \to V^*$ изоморфизам векторских простора, прво својство у (2) следи из одговарајућих својства анихилатора. Пошто је $W \subset (W^\beta)^\beta$, друго својство у (2) следи из првог, јер су $(W^\beta)^\beta$ и W простори исте димензије.

Задатак 1. Нека је β недегенерисана билинеарна форма на векторском простору V коначне димензије и нека су $W_1, W_2 \subset V$ потпростори. Доказати да је

$$(W_1 + W_2)^\beta = W_1^\beta \cap W_2^\beta \qquad \text{и} \qquad (W_1 \cap W_2)^\beta = W_1^\beta + W_2^\beta.$$

Извести одатле закључак да из $W_1 \subset W_2$ следи $W_2^\beta \subset W_1^\beta$. ✓

Ако је у векторском простору V изабрана база, билинеарној форми β можемо да придружимо матрицу B, такву да форма β има координатни запис

$$\beta(v, w) = [v]\, B\, [w]^T,$$

где су $[v] = [v_1, \ldots, v_m]$, $[w] = [w_1, \ldots, w_m]$ координате вектора v и w у изабраној бази. Недегенерисаност форме β је еквивалентна инвертибилности матрице B, тј. услову $\det B \neq 0$, а симетричност услову $B^T = B$.

Билинеарна форма β је *антисиметрична* (или *кососиметрична*) ако је $\beta(v,w) = -\beta(w,v)$ за све $v, w \in V$. Ако је у изабраној бази форма β представљена матрицом B, антисиметричност форме β је еквивалентна услову антисиметричности матрице B: $B^T = -B$.

Свака билинеарна форма може да се представи као збир симетричне и антисиметричне форме, као што и свака матрица може да се представи као збир симетричне и антисиметричне:

$$B = \frac{1}{2}(B + B^T) + \frac{1}{2}(B - B^T).$$

Недегенерисана симетрична билинеарна форма, или, еквивалентно, инвертибилна симетрична матрица је дефинисана у сваком векторском простору (тривијалан пример је јединична матрица). То нам омогућава да, помоћу разлагања јединице, дефинишемо Риманову метрику на свакој глаткој многострукости.

Недегенерисана антисиметрична билинеарна форма постоји само у векторским просторима парне димензије:

$$B^T = -B \;\Rightarrow\; \det B^T = (-1)^m \det B,$$

где је $m = \dim V$, па m мора да буде паран број. Следеће тврђење може да се сматра антисиметричном аналогијом Грам–Шмитовог поступка ортонормализације.

Тврђење 1. *Нека је V векторски простор димензије $2n$ и нека је $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ недегенерисана антисиметрична билинеарна форма. Тада постоји база $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n$ простора V за коју је*

$$\beta(v_i, v_j) = \beta(w_i, w_j) = 0, \qquad \beta(v_i, w_j) = \delta_{ij}.$$

$\triangle$ За $n = 1$ тврђење је тривијално. Претпоставимо да оно важи за просторе димензије $2(n-1)$ и нека је V простор димензије $2n$. Нека је $v_1 \in V$ произвољан вектор. Из недегенерисаности форме β следи да постоји вектор $w_1 \in V$, такав да је $\beta(v_1, w_1) = 1$. Нека је W линеарни омотач вектора v_1 и w_1. Тада је W^β векторски простор димензије $2(n-1)$. Рестрикција форме β на W^β је недегенерисана антисиметрична билинеарна форма, па из индуктивне претпоставке тврђење важи на W^β. $\bigtriangledown$

Симетричне и антисиметричне форме производе различите геометрије простора V. Ако је β симетрична форма, (2) има јачу формулацију: простор V је директна сума простора W и његовог β–ортогоналног комплемента. У случају антисиметричних форми сума $W + W^\beta$ може да се разликује од простора V. На пример, ако је $\dim W = 1$, онда је $W \subset W^\beta$.

Ако је M глатка многострукост, фамилија антисиметричних билинеарних форми на T_pM која глатко зависи од p је диференцијална 2–форма. Из претходних разматрања видимо да недегенерисана 2–форма постоји само на многострукостима парне димензије.

Тврђење 2. *Диференцијална форма $\omega \in \Omega^2(M)$ на многострукости M димензије $2n$ је недегенерисана ако и само ако је*

$$\omega^{\wedge n} := \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n} \neq 0.$$

$\triangle$ Нека је $p \in M$. Ако је ω недегенерисана, из Тврђења 1 следи да постоји база $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$ простора T_pM, таква да је $\omega^{\wedge n}(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n) \neq 0$.

Обрнуто, ако је форма ω дегенерисана, онда постоји вектор $u_1 \in T_pM$, такав да је $\omega(u_1, w) = 0$ за све $w \in T_pM$, па за сваку базу $u_1, u_2, \dots, u_{2n} \in T_pM$ која садржи вектор u_1 важи $\omega^{\wedge n}(u_1, \dots, u_{2n}) = 0$. $\triangledown$

Дефиниција 1. Недегенерисана 2–форма $\omega \in \Omega^2(M)$ која је затворена, тј. таква да је $d\omega = 0$, назива се *симплектичком формом* на M. Многострукост M на којој је задата симплектичка форма назива се *симплектичком многострукошћу.* $\diamondsuit$

Из Тврђења 2 следи да је ова дефиниција еквивалентна оној коју смо дали у Глави 0 (видети Напомену 6 на стр. 27).

Пример 1. Ако је V векторски простор коначне димензије и V^* његов дуал, онда је $W := V \oplus V^*$ симплектичка многострукост, са симплектичком формом

$$\omega(v_1 \oplus \lambda_1, v_2 \oplus \lambda_2) := \lambda_2(v_1) - \lambda_1(v_2).$$

Приметимо да је услов $d\omega$ тривјално испуњен, јер је форма ω дефинисана уз имплицитну идентификацију $TW \cong W \times W$, тако да не зависи од прве компоненте (базне тачке раслојења TW). Ако у V изаберемо базу, добијамо простор $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ са симплектичком формом $\omega = dq_1 \wedge dp_1 + \ldots + dq_n \wedge dp_n$. $\sharp$

Из услова недегенерисаности симплектичке форме следи парност димензије симплектичке многострукости, $\dim M = 2n$. Из Тврђења 2 следи да је свака симплектичка многострукост оријентабилна; са канонском оријентацијом дефинисаном формом $\omega^{\wedge n}$. Обично за форму запремине на симплектичкој многострукости узимамо форму $\frac{1}{n!}\omega^{\wedge n}$, која је у случају простора $\mathbb{R}^{2n}$ са симплектичком формом $\omega = dq_1 \wedge dp_1 + \ldots + dq_n \wedge dp_n$ стандардна форма запремине у еуклидском простору, $dq_1 \wedge dp_1 \wedge \ldots \wedge dq_n \wedge dp_n$. У случају да је многострукост M компактна и без границе, из затворености $d\omega = 0$ следи нешто сложенији тополошки услов

$$H^{2k}_{dR}(M) \neq \{0\}, \qquad \text{за} \qquad k \in \{0, \dots, n\},$$

који је последица Стоксове теореме. Заиста, ако би било $H^{2k}_{dR}(M) = 0$, онда би затворена форма $\omega^{\wedge k}$ била и тачна, тј. било би $\omega^{\wedge k} = d\eta$, па би важило и $\omega^{\wedge n} = d(\eta \wedge \omega^{\wedge(n-k)})$. Одатле би следило

$$V(M) = \frac{1}{n!}\int_M \omega^{\wedge n} = \frac{1}{n!}\int_M d(\eta \wedge \omega^{\wedge(n-k)}) = \frac{1}{n!}\int_{\partial M = \emptyset} \eta \wedge \omega^{\wedge(n-k)} = 0,$$

што је контрадикција.

Специјално, једина сфера која је симплектичка је дводимензиона сфера $\mathbb{S}^2$. Свака оријентабилна дводимензиона површ је симплектичка многострукост.

Напомена 1. Можемо да приметимо да је постојање симплектичке структуре на многострукости веома условљено топологијом те многострукости. Међутим, иако већина многострукости не допушта симплектичку структуру, свакој многострукости можемо да придружимо природну симплектичку многострукост – ускоро ћемо да видимо да котангентно раслојење T^*M *сваке* многострукости M има канонску симплектичку структуру. $\diamond$

Нека је M симплектичка многострукост димензије $2n$ и $L \subset M$ њена подмногострукост на којој је симплектичка форма једнака нули; прецизније, нека је $\omega(T_pL \times T_pL) = \{0\}$ за све $p \in L$, или, у терминима улагања

$$j_L : L \hookrightarrow M, \qquad j_L^* \omega = 0.$$

Тада је $\dim L \leq n$. Заиста, $\omega(TL) = \{0\}$ значи да је, у ознакама из (1), за свако $p \in L$

$$T_pL \subset (T_pL)^\omega.$$

Пошто је, као што смо видели у (2),

$$\dim T_pL + \dim (T_pL)^\omega = 2n,$$

следи да је $\dim T_pL \leq n$. Многострукости максималне димензије на којима је симплектичка форма једнака нули издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 2. Подмногострукост L симплектичке многострукости M називамо *Лагранжевом* ако је

(1) $\dim L = \frac{1}{2} \dim M$;
(2) $j_L^* \omega = 0$,

где је $j_L : L \hookrightarrow M$ инклузија, а ω симплектичка форма на M. $\Diamond$

Лагранжеве подмногострукости уопштавају симетрије симплектичких подмногострукости, симплектоморфизме, на начин који прецизирају следећа дефиниција и лема.

Дефиниција 3. Дифеоморфизам $\phi : M \to M$ симплектичке многострукости M са симплектичком формом ω назива се *симплектоморфизмом* ако је $\phi^* \omega = \omega$. $\Diamond$

Лема 1. *Нека је M симплектичка многострукост са симплектичком формом ω. Тада је $M \times M$ симплектичка многострукост са симплектичком формом $\Omega := \pi_1^* \omega - \pi_2^* \omega$, где су $\pi_1, \pi_2 M \times M \to M$ канонске пројекције на прву и другу координату. Дифеоморфизам $\phi : M \to M$ је симплектоморфизам ако и само ако је његов график*

$$\Gamma(\phi) := \{(p, \phi(p)) \in M \times M \mid p \in M\}$$

Лагранжева подмногострукост у $M \times M$ са формом Ω.

$\triangle$ Доказ да је Ω симплектичка форма је елементаран; докажимо други део тврђења. Нека је

$$j_{\Gamma(\phi)} := (\mathrm{id}_M, \phi) : M \to M \times M, \qquad p \mapsto (p, \phi(p))$$

параметризација подмногострукости $\Gamma(\phi)$, тј. улагање, чија је слика $\Gamma(\phi)$. Пошто је

$$j_{\Gamma(\phi)}^* \Omega = (\mathrm{id}_M^*, \phi^*)(\pi_1^* \omega - \pi_2^* \omega) = \omega - \phi^* \omega,$$

следи да је $j_{\Gamma(\phi)}^* \Omega = 0$ ако и само ако је $\phi^* \omega = \omega$. $\bigtriangledown$

Симплектичку геометрију је често корисно посматрати у пару са *контактном геометријом.* То је геометрија непарне димензије, чији је однос са симплектичком геометријом сличан односу пројективне геометрије са еуклидском.

Пре него што пређемо на формалну дефиницију, подсетимо се да из Фробенијусове теореме следи да је дистрибуција ξ тангентних хиперравни, локално задатих 1–формом α као $\xi = \ker \alpha$, интеграбилна ако и само ако је

$$\alpha \wedge d\alpha = 0.$$

Контактна геометрија описује сасвим супротну ситуацију.

Дефиниција 4. *Контактна структура* на многострукости N непарне димензије $2n+1$ је глатка дистрибуција хиперравни $\xi \subset TN$ која је *максимално неинтеграбилна*, тј. која је локално задата 1–формом α, таквом да је

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} \neq 0. \tag{3}$$

Пар (N, ξ) назива се *контактном многострукошћу.* $\diamondsuit$

Пошто форма β дефинише исту дистрибуцију ξ ако и само ако је $\beta = f\alpha$ за неку глатку функцију f свуда различиту од нуле, претходна дефиниција је добра, тј. не зависи од избора форме α, него само од дистрибуције ξ, јер је

$$\beta \wedge (d\beta)^{\wedge n} = f\alpha \wedge (df \wedge \alpha + f \wedge d\alpha)^{\wedge n} = f^{n+1}\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n}$$

(у последњем кораку користили смо $\alpha \wedge \alpha = 0$).

Приметимо да је контактна структура задата дистрибуцијом хиперравни ξ, а не формом α. Форма α је, у општем случају, дефинисана само локално. Контактну структуру која је задата глобално дефинисаном формом α називамо *коориjентабилном.* Форму α која дефинише контатнтну структуру ξ називамо *контактном формом.*

Специјално, ако је $n = 1$, тј. $\dim, N = 3$, контактна структура је дводимензиона дистрибуција $\xi \subset TN$. Из Леме 1 на стр. 24 следи да у том, тродимензионом случају, за свака два линеарно независна векторска поља $X, Y \in \xi$ важи $[X, Y] \notin \xi$. Одатле следи да у за контактну форму α услов (3) у случају $n = 1$, $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$, еквивалентан услову $d\alpha\big|_\xi \neq 0$.

Пример 2. Диференцијална форма

$$\alpha := dz - \sum_{j=1}^{n} p_j dq_j$$

дефинише коориjентабилну контактну структуру на $\mathbb{R}^{2n+1}$ са координатама $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, z)$. $\sharp$

Нека је N контактна многострукост димензије $2n+1$ са контактном структуром ξ и нека је $L \subset N$ интегрална подмногострукост структуре ξ, тј. таква да је $TL \subset \xi$. Из услова максималне неинтеграбилности контактне структуре следи да је $\dim L \leq n$. Интегралне подмногострукости максималне димензије уводимо следећом дефиницијом.

Дефиниција 5. Нека је N контактна многострукост димензије $2n+1$ са контактном структуром ξ. Подмногострукост $L \subset N$ назива се *Лежандровом* ако је

(1) $\dim L = n$;
(2) $TL \subset \xi$.

Ако је дистрибуција ξ задата контактном формом α, услов (2) може да се формулише и са $\alpha(TL) = \{0\}$. $\diamondsuit$

Напомена 2. У Напомени 1 смо рекли да је котангентно раслојење T^*M произвољне глатке многострукости M симплектичка многострукост. Видећемо и да је пројективизација овог раслојења (тј. раслојење чији су слојеви пројективизације котангентних простора T_pM), раслојење PT^*M, многострукост која има канонску контактну структуру. На тај начин свакој многострукости можемо на природан начин да придружимо контакнту многострукост. $\diamond$

Из Дарбуове теореме (видети Теорему 14 на стр. 26 и Напомену 6 иза ње) следи да симплектичке и контактне многострукости немају локалних инваријанти: свака симплектичка многострукост локално је изоморфна симплектичком еуклидском простору из Примера 1, а свака контактна многострукост локално је изоморфна контактном еуклидском простору из Примера 1. То симплектичку и контактну геометрију чини различитом од (псеудо) Риманове, у којој постоје локалне инваријанте, као што је кривина. Сфера и раван нису локално изометричне, али јесу локално симплектоморфне, што је добро познато географима: немогуће је направити карту света која (пропорционално) чува растојања, али постоји карта света која верно осликава површине.

1. Котангентна раслојења

1.1. Лиувилова форма и симплектичка структура. Применом глатког функтора $\mathrm{Hom}\,(\cdot,\mathbb{R})$ на тангентно раслојење TM добијамо котангентно раслојење T^*M. Ова два раслојења су изоморфна: ако снабдемо M Римановом метриком $\langle\cdot,\cdot\rangle$, пресликавање

$$TM \to T^*M, \qquad X \mapsto \langle X, \cdot\rangle$$

је изоморфизам векторских раслојења. Овај изоморфизам није канонски, тј. зависи од увођења нове структуре, Риманове метрике.

И поред тога што су TM и T^*M изоморфна векторска раслојења, котангентно раслојење има богатију структуру. Наиме, сечења тог раслојења су диференцијалне 1–форме и на њима је дефинисан оператор спољашњег диференцирања

$$d : \Omega^1(M) \to \Omega^2(M).$$

Ако је $X \in \mathcal{X}(M)$ сечење тангентног раслојења TM, из Теореме 11 на стр. 14 следи да око сваке тачке постоји карта у којој је $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Слично тврђење не важи за сечења котангентног раслојења: за сечење котангентног раслојења, тј. форму $\eta \in \Omega^1(M)$, која није затворена, не постоји карта око произвољне тачке у којој је $\eta = dx_1$, пошто је $d(dx_1) = 0$, а (локални) дифеоморфизми чувају својство затворености форми. Одатле закључујемо да на простору $\mathcal{X}(M)$ сечења тангентног раслојења не може да се дефинише оператор d који би имао својства спољашњег диференцијала.

Богатија структура котангентног раслојења омогућава нам да на њему дефинишемо канонску симплектичку структуру.

Дефиниција 6. Нека је $\pi : T^*M \to M$ канонска пројекција на котангентном раслојењу. *Лиувилова форма* на многострукости T^*M је 1–форма $\lambda \in \Omega^1(T^*M)$ дефинисана са

$$\lambda_p := \pi^*_{\pi(p)}(p). \tag{4}$$

Лиувилова форма се још назива и *таутолошком формом* или *симплектичким потенцијалом.* $\diamondsuit$

Тачка p у (4) игра двоструку улогу, улогу тачке многострукости T^*M и линеарног функционала $p : TM \to \mathbb{R}$, тако да (4) може да се формулише и као

$$\lambda_p(\xi_p) = p(\pi_*(p)\xi_p), \quad \text{за} \quad \xi_p \in T_pT^*M,$$

где је $\pi_*(p) : T_pT^*M \to T_{\pi(p)}M$ извод пресликавања $\pi : T^*M \to M$ у тачки $p \in T^*M$, а $p(\pi_*(p)\xi_p)$ вредност функционала $p \in T^*_{\pi(p)}M$ у $\pi_*(p)\xi_p \in T_{\pi(p)}M$.

Лема 2. *Лиувилова форма је јединствена форма $\lambda \in \Omega^1(T^*M)$ са својством да је*

$$s^*\lambda = s \tag{5}$$

за свако сечење $s : M \to T^*M$.

$\triangle$ Сечење s на левој страни у (5) схватамо као пресликавање $s : M \to T^*M$, а на десној као форму $s \in \Omega^1(M)$. Пошто је $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$, важи

$$s^*\lambda_{s(q)} = s^*_{s(q)} \circ \pi^*_q(s(q)) = (\pi \circ s)^*_q(s(q)) = s(q),$$

што је и требало доказати. $\triangledown$

Лема 3. *Нека су $(q_1, \ldots, q_n)$ локалне координате у карти $U \subset M$ и нека су $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ координате на T^*U, такве да је $p_i(q_j) = \delta_{ij}$. Тада је*

$$\lambda_U = p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n$$

локални запис Лиувилове форме у карти U.

$\triangle$ Доказ може да се изведе директно из Дефиниције 6 или из Леме 2. $\triangledown$

Последица 1. *Спољашњи извод Лиувилове форме у карти из претходне леме је*

$$d\lambda_U = dp_1 \wedge dq_1 + \ldots + dp_n \wedge dq_n,$$

одакле следи да је $d\lambda$ недегенерисана тачна форма.

Дефиниција 7. Диференцијална форма

$$\omega := -d\lambda$$

назива се *канонском симплектичком формом* на T^*M. $\lozenge$

1.2. Функционал дејства. Нека је $\mathcal{P}(T^*M)$ простор глатких путева $\gamma : [0, 1] \to T^*M$ и нека је

$$\mathcal{A}_0 : \mathcal{P}(T^*M) \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{A}_0(\gamma) := \int_0^1 \gamma^*\lambda$$

пресликавање дефинисано интегралом Лиувилове форме дуж пута γ. Његова рестрикција на простор контрактибилних петљи је симплектичка инваријанта. Прецизније, важи следећа леме.

Лема 4. *Ако је $\gamma : \mathbb{S}^1 \to T^*M$ глатка контрактибилна петља и $\psi : T^*M \to T^*M$ симплектоморфизам, онда је $\mathcal{A}_0(\psi \circ \gamma) = \mathcal{A}_0(\gamma)$.*

$\triangle$ Пошто је $\gamma : \mathbb{S}^1 \to T^*M$ контрактибилна петља, она је граница диска $u : D^2 \to T^*M$, па из Стоксове теореме следи

$$\mathcal{A}_0(\gamma) = -\int_D u^*\omega,$$

где је $\omega = -d\lambda$ канонска симплектичка форма на T^*M. Пошто је ψ симплектоморфизам, тј. пошто је $\psi^*\omega = \omega$, важи $(\psi \circ u)^*\omega = u^*\psi^*\omega = u^*\omega$, па је

$$-\int_D u^*\omega = -\int_D (\psi \circ u)^*\omega = \int_D (\psi \circ u)^* d\lambda = \int_{\mathbb{S}^1} \gamma^*\lambda,$$

чиме је тврђење доказано. $\bigtriangledown$

Лема 5. *Ако је $\psi : T^*M \to T^*M$ дифеоморфизам, такав да за сваку контрактибилну петљу $\gamma : \mathbb{S}^1 \to T^*M$ важи $\mathcal{A}_0(\psi \circ \gamma) = \mathcal{A}_0(\gamma)$, онд је ψ симплектоморфизам.*

$\bigtriangleup$ Доказ следи из чињенице да је за сваки диск D_ε око произвољне тачке p

$$\int_{D_\varepsilon} \omega = \int_{D_\varepsilon} \psi^*\omega$$

и Теореме о средњој вредности за интеграле. $\bigtriangledown$

Пример 3. У општем случају, једнакост $\mathcal{A}_0(\psi \circ \gamma) = \mathcal{A}_0(\gamma)$ за симплектоморфизам ψ не мора да важи за неконтрактибилне петље. Вертикална транслација $(q, p) \mapsto (q, p+c)$ котангентног раслојења $T^*\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ је симплектичка[1], али не чува вредност интеграла $\oint_\gamma p dq$ на неконтрактибилним петљама $\gamma : \mathbb{S}^1 \to T^*\mathbb{S}^1$. $\sharp$

Размотримо следеће уопштење функционала $\mathcal{A}_0$. Нека је $H : T^*M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ глатка функција. За криву глатку $\gamma : [0,1] \to T^*M$ интеграл

$$\mathcal{A}_H(\gamma) := \int_0^1 \gamma^*\lambda - H(\gamma(t), t)\, dt \tag{6}$$

назива се *дејством* дуж криве γ, а функционал $\gamma \mapsto \mathcal{A}_H(\gamma)$ на простору глатких кривих назива се *функционалом дејства.* Функција $H : T^*M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ се назива *Хамилтоновом функцијом* или *Хамилтонијаном.* Некада уместо $H(x,t)$ пишемо H_t и H посматрамо као фамилију функција $H_t : T^*M \to \mathbb{R}$ параметризованих реалним параметром $t \in [0,1]$. За фиксирано t са dH_t означавамо диференцијал функције H_t по променљивој $x \in T^*M$. Пошто је симплектичка форма недегенерисана, постоји јединствено векторско поље X_{H_t} (за свако фиксирано t), такво да је

$$X_{H_t} \lrcorner \omega = dH_t,$$

где је $X \lrcorner \omega$ 1–форма дефинисана са[2] $X \lrcorner \omega(Y) = \omega(X, Y)$. Векторско поље X_{H_t} назива се *Хамилтоновим векторским пољем* . Њиме дефинисане једначине

$$\dot\gamma(t) = X_{H_t}(\gamma(t)) \tag{7}$$

називају се *Хамилтоновим једначинама* .

Задатак 2. Доказати да је

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H_t}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H_t}{\partial q} \tag{8}$$

запис Хамилтонових једначина у координатама из Леме 3. ✓

[1] $dq \wedge dp = dq \wedge d(p+c)$ за сваку константу c

[2] За $X \lrcorner \omega$ се користе и ознаке $i(X)\omega$ и $i_X\omega$; пресликавање $\omega \mapsto i_X\omega$ назива се *контракцијом* диференцијалне форме или њеним *унутрашњим диференцијалом.*

Напомена 3. (Лежандрова трансформација) Хамилтонове једначине на T^*M можемо да сматрамо дуалним Ојлер–Лагранжевим једначинама на TM о којима смо говорили у Напомени 16 на стр. 88, у следећем смислу. Нека је $L : TM \times [0,1] \to \mathbb{R}$ Лагранжијан варијационог проблема. Његова *Лежандрова трансформација* је функција дефинисана са

$$H : T^*M \times [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad H(q,p,t) := \sup_{v \in T_qM} (\langle v, p\rangle - L(q,v,t)), \tag{9}$$

где је $\langle v, p\rangle$ дејство ковектора p на вектор v. Претпоставимо да је L глатка и конвексна на слојевима тангентног раслојења. Тада се максимум на десној страни достиже у тачки

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}, \tag{10}$$

или, написано без координата, у тачки

$$\zeta = d_{\mathrm{vert}} L(\xi) \in T^*M \quad \text{за} \quad \xi \in TM, \tag{11}$$

где је $d_{\mathrm{vert}}L$ извод функције L у вертикалном правцу (тј. извод рестрикције пресликавања L на слој раслојења TM). У том случају је

$$H(q,p,t) = \langle v, p\rangle - L(q,v,t), \tag{12}$$

где је v у $L(q,v,t)$ функција од p, добијена решавањем[3] једначине (10) по v. Из (12) добијамо

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q}\, dq + \frac{\partial H}{\partial p}\, dp + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt = -\frac{\partial L}{\partial q}\, dq + v\, dp - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Одатле следи

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = v, \tag{13}$$

где $v\,dp$ означава вертикални извод пресликавања $TM \times T^*M \ni (\xi, \zeta) \mapsto \langle \xi, \zeta\rangle$ по другој променљивој. Ако у (13) ставимо $v = \dot q$ и искористимо $p := \frac{\partial L}{\partial \dot q}$, видимо да Хамилтонове једначине (8) за Хамилтонијан који је Лежандрова трансформација Лагранжијана L одговарају Ојлер–Лагранжевим једначинама (42) на стр. 88. $\diamond$

Пример 4. Нека је на M задата (псеудо) Риманова метрика, тј. недегенерисана симетрична билинеарна форма $g : TM \times TM \to \mathbb{R}$. Помоћу ње је дефинисан изоморфизам

$$i : TM \to T^*M, \qquad i(\xi) := \xi \lrcorner g,$$

који нам омогућава да и на T^*M дефинишемо билинеарну форму g^* на T^*M, захтевом да i буде изометрија, тј. $i^*g^* = g$. Тиме норма $\|\dot q\| := \sqrt{g(v,v)}$ на

[3] На овом месту користимо конвексност и глаткост, из којих следи јединственост тог решења, будући да (строго) конвексна функција има јединствен минимум, чиме је обезбеђена ињективност пресликавања $\xi \mapsto \zeta$ дефинисаног помоћу (11). Уколико желимо да то пресликавање буде и сурјективно, неопходан нам је и услов *суперлинеарности* пресликавања L, тј. услов $\|v\|^{-1}L(q,v,t) \to \infty$ кад $\|v\| \to \infty$. Нећемо улазити дубље у ове детаље.

TM индукује норму $\|p\|^*$ на T^*M. Функција $(\|\cdot\|^*)^2$ је Лежандрова трансформација функције $\|\cdot\|^2$, па геодезијском току на TM (видети Дефиницију 23 на стр. 89), који је Ојлер–Лагранжев систем за варијациони проблем дефинисан функционалом енергије, одговара Хамилтонов систем дефинисан функционалом дејства са Хамилтонијаном $(\|p\|^*)^2$. Ово је симплектички поглед на (псеудо) Риманову геометрију.

Општије, Лежандрова трансформација преводи варијациони проблем са Лагранжијаном $L = \frac{1}{2}\|v\|^2 - V$ (видети Задатак 17 на стр. 88) у Хамилтонов систем са Хамилтонијаном $H = \frac{1}{2}(\|p\|^*)^2 + V$. Израз H одговара укупној енергији система, тј. збиру кинетичке енергије $\frac{1}{2}(\|p\|^*)^2$ и потенцијалне енергије V. Тако смо добили два уопштења Њутнове механике: *Лагранжеву механику*, формулисану као варијациони проблем на тангентном раслојењу, и *Хамилтонову механику*, формулисану на котангентном раслојењу. Ковектор $p = \frac{\partial L}{\partial v}$ назива се *импулсом.* Специјално, у ако је M еуклидски простор са метриком задатом квадратном формом $v\cdot M\cdot v^T$, где је M симетрична матрица, импулс је $p = M \cdot v$. $\sharp$

Ако варирамо почетни услов у (7), добијамо фамилију дифеоморфизама φ_t дефинисану Хамилтоновим системом

$$\frac{d\varphi_t}{dt}(p) = X_{H_t}(\varphi_t(p)), \qquad \varphi_0 = \mathrm{id}. \tag{14}$$

Ако Хамилтонијан H има компактан носач, решење једначине (14) може да се прошири на све вредности параметра t. Добијену фамилију дифеоморфизама φ_t називамо фамилијом *Хамилтонових дифеоморфизама.*

Из Картанове формуле

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega = \varphi_t^*(X_{H_t}\lrcorner d\omega + d(X_{H_t}\lrcorner\omega)),$$

затворености симплектичке форме и дефиниције Хамилтоновог поља следи

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega = d(dH_t) = 0. \tag{15}$$

Пошто је $\varphi_0^*\omega = \mathrm{id}^*\omega = \omega$, из (15) следи $\varphi_t^*\omega = \omega$ за све t. Тиме смо доказали следеће тврђење.

Тврђење 3. *Хамилтонови дифеоморфизми су симплектоморфизми.*

Пример 5. Нека је μ диференцијална 1–форма на M. Посматрајмо вертикалну транслацију

$$T_\mu : T^*M \to T^*M, \qquad T_\mu(\zeta) = \zeta + \mu.$$

Она је дифеоморфизам, који може да се добије као решење $T_\mu := \tau_1$ диференцијалне једначине

$$\frac{d}{dt}\tau_t(\zeta) = \mu, \qquad \tau_0 = \mathrm{id}_{T^*M} \tag{16}$$

(ова једначина може експлицитно да се реши $\tau_t(\zeta) = \zeta + t\mu$). Приметимо да смо у (16) са μ означили вертикално векторско поље у T^*M, користећи идентификацију тангентног простора на влакно (вертикалног тангентног простора) раслојења $\pi : T^*M \to M$ и самог влакна. Уз исту идентификацију можемо да напишемо резултат примене Картанове формуле

$$\frac{d}{dt}\tau_t^*\lambda = \tau_t^*(d\lambda(\mu) + \mu\lrcorner d\lambda). \tag{17}$$

где μ схватамо као вертикално векторско поље. Вредност Лиувилове форме λ на вертикалним векторским пољима је нула, па (17) гласи

$$\frac{d}{dt}\tau_t^*\lambda = -\tau_t^*(\mu\lrcorner\omega). \tag{18}$$

Ако форму $s_t := \eta + t\mu$ схватимо као сечење раслојења T^*M, онда је $\tau_t = \pi \circ s_t$, па из Леме 2 следи

$$\tau_t^*\lambda = \pi^* s_t^*\lambda = \pi^* s_t.$$

Одатле и из (18) следи да је

$$\mu\lrcorner\omega = -\pi^*\mu,$$

па је

$$\frac{d}{dt}\tau_t^*\lambda = \tau_t^*\pi^*\mu \qquad \text{и} \quad T_\mu^*\lambda - \lambda = \int_0^1 \tau_t^*\pi^*\mu.$$

Одатле видимо да је дифеоморфизам T_μ симплектички ако и само ако је μ затворена форма и да је фамилија τ_t дифеоморфизама Хамилтонова ако и само ако је μ тачна форма. $\sharp$

Пример 6. Нека је M глатка многострукост и $f : M \to M$ дифеоморфизам. Дуал првог извода f_* је пресликавање

$$f^* : T^*M \to T^*M,$$

које чува Лиувилову форму:

$$(f^*)^*\lambda = \lambda, \tag{19}$$

или, прецизније, $(f^*)^*\lambda_{f^*(\eta)} = \lambda_\eta$. Специјално, f^* је симплектоморфизам.

Тврђење (19) можемо да докажемо записујући f^* и λ у координатама. Ми дајемо други доказ, помоћу Леме 2. Нека је $s : M \to T^*M$ сечење раслојења $\pi : T^*M \to M$. Тада је

$$s^*((f^*)^*\lambda)_{s(q)} = (f^* \circ s)^*\lambda_{f^*\circ s(q)}$$

Ако f није идентичко пресликавање, пресликавање $f^* \circ s$ није сечење, али $f^* \circ s \circ f^{-1}$ јесте, па ако претходну једнакост напишемо у облику

$$\begin{aligned} s^*((f^*)^*\lambda)_{s(q)} &= (f^* \circ s \circ f^{-1} \circ f^{-1})^*\lambda_{f^*\circ s\circ f^{-1}f(q)} \\ &= (f^{-1})^* \circ (f^* \circ s \circ f^{-1})^*\lambda_{f^*\circ s\circ f^{-1}(f(q))} \end{aligned}$$

можемо на сечење $f^* \circ s \circ f^{-1}$ да применимо Лему 2. Тако добијамо

$$s^*((f^*)^*\lambda)_{s(q)} = (f^{-1})^*(f^* \circ s \circ f^{-1})(f(q)) = s(q),$$

односно $s^*((f^*)^*\lambda) = s$ за свако сечење s. Одатле, на основу Леме 2, следи да је $(f^*)^*\lambda$ Лиувилова форма. $\sharp$

Дефиниција 8. Дифеоморфизам $f : T^*M \to T^*M$ за који је $f^*\lambda - \lambda$ тачна форма назива се *тачним симплектоморфизмом* . Другим речима, дифеоморфизам f је тачни симплектоморфизам ако је

$$f^*\lambda - \lambda = dS$$

за неку функцију $S : T^*M \to \mathbb{R}$. $\diamondsuit$

Наравно, тачни симплектоморфизми су симплектоморфизми (што оправдава употребљену терминологију), јер је за њих

$$f^*\omega - \omega = d(f^*\lambda - \lambda) = d(dS) = 0.$$

Штавише, из овог аргумента видимо да је $f : T^*M \to T^*M$ симплектоморфизам ако и само ако је форма $f^*\lambda - \lambda$ затворена. У котангентим раслојењима над базом M са $H^1_{dR}(M) = 0$ (нпр. у еуклидском простору $\mathbb{R}^{2n} = T^*\mathbb{R}^n$, или било ком тангентном раслојењу над просто повезаном базом) сваки симплектоморфизам је тачан, јер је ту свака затворена 1–форма тачна.

Ако је $f^*\lambda - \lambda = dS_f$ и $g^*\lambda - \lambda = dS_g$, онда је $(g \circ f)^*\lambda - \lambda = d(S_g \circ f + S_f)$. Тиме је доказана следећа лема.

Лема 6. *Скуп тачних симплектоморфизама је подгрупа групе симплектичких дифеоморфизама.*

У Примеру 6 смо видели да је подизање сваког дифеоморфизма произвољне многострукости M на котангентно раслојење T^*M тачан симплектоморфизам. Транслација T_μ из Примера 5 је тачан симплектоморфизам ако и само ако је μ тачна форма, тј. ако и само ако је фамилија τ_t транслација Хамилтонова. Важи и општије тврђење.

Тврђење 4. *Глатка фамилија симплектоморфизама* $\varphi_t : T^*M \to T^*M$, $t \in [0,1]$, $\varphi_0 = \mathrm{id}$ *је Хамилтонова ако и само ако је за свако* t *симплектоморфизам* φ_t *тачан.*

$\triangle$ ($\Rightarrow$) Нека је φ_t Хамилтонова фамилија, генерисана Хамилтонијаном H_t и Хамилтоновим векторским пољем X_{H_t}. Применом Картанове формуле и дефиниције Хамилтонијана и Хамилтоновог векторског поља добијамо

$$\varphi_t^*\lambda - \lambda = \int_0^t \frac{d}{ds}\varphi_s^*\lambda \, ds = dS_t, \quad \text{где је} \quad S_t = \int_0^t \varphi_s^*(\lambda(X_{H_s}) - H_s)\, ds, \tag{20}$$

одакле следи да је $\varphi_t^*\lambda$ тачан симплектоморфизам.

($\Leftarrow$) Нека је φ_t фамилија тачних симплектоморфизама:

$$\varphi_t^*\lambda - \lambda = dS_t.$$

Диференцирањем овог израза и применом Картанове формуле добијамо

$$\frac{d}{dt}dS_t = \varphi_t^*(X_t \lrcorner \omega + d(\lambda(X_t))),$$

где је $X_t(\varphi_t(x)) = \frac{d}{dt}\varphi_t(x)$. Одатле следи

$$X_t \lrcorner \omega = d\Big((\varphi_t^*)^{-1}\frac{d}{dt}S_t - \lambda(X_t)\Big),$$

па видимо да је X_t Хамилтоново векторско поље са Хамилтонијаном $H_t := (\varphi_t^*)^{-1}\frac{d}{dt}S_t - \lambda(X_t)$. $\triangledown$

Задатак 3. Доказати да је $f : T^*M \to T^*M$ тачан Лагранжев симплектоморфизам ако и само ако за сваку глатку затворену криву $\gamma : \mathbb{S}^1 \to T^*M$ важи

$$\int_{\mathbb{S}^1} \gamma^*\lambda = \int_{\mathbb{S}^1} (f \circ \gamma)^*\lambda.$$

Овај задатак допуњава Леме 4 и 5 и Пример 3 (видети стр. 127). ✓

Следећа теорема доводи у везу Хамилтонове једначине и екстремале функционала дејства.

Теорема 1. (Принцип најмањег дејства) *Нека је $\mathcal{P}_0$ било који потпростор простора $\mathcal{P}(T^*M)$ путева $\gamma : [0,1] \to T^*M$ на дефинисан граничним условима $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$ тако да је*

$$\lambda(\gamma(0))\xi(\gamma(0)) = \lambda(\gamma(1))\xi(\gamma(1))$$

за свако поље варијације $\xi \in T\mathcal{P}_0$. Тада су критичне тачке рестрикције функционала дејства $\mathcal{A}_H$ на $\mathcal{P}_0$ решења Хамилтонових једначина.

$\triangle$ Нека је $\gamma_s(t)$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$, глатка варијација криве $\gamma_0 \equiv \gamma$ и нека је

$$\xi(t) := \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \gamma_s(t) \in T_{\gamma(t)}(T^*M)$$

поље варијације. Диференцирањем $\mathcal{A}_H(\gamma_s)$ под знаком интеграла, уз примену Картанове формуле и једнакост $dH_t = X_{H_t} \lrcorner \omega$, добијамо

$$d\mathcal{A}(\xi) = -\int_0^1 \omega(\xi, \dot{\gamma} - X_{H_t}(\gamma)) + \lambda(\gamma(1))\xi - \lambda(\gamma(0))\xi. \tag{21}$$

Пошто је $\lambda(\gamma(1))\xi - \lambda(\gamma(0))\xi = 0$ на $\mathcal{P}_0$, из (21) следи

$$\int_0^1 \omega(\xi, \dot{\gamma} - X_{H_t}(\gamma)) = 0$$

за свако поље варијације ξ дуж γ. Одатле, због недегенерисаности симплектичке форме, следи $\dot{\gamma} - X_{H_t}(\gamma) = 0$. $\triangledown$

Пример 7. Простор петљи задовољава услове за простор $\mathcal{P}_0$ у Теореми 1; критичне тачке функционала дејства на том простору су периодичне Хамилтонове орбите.

Простор путева који почињу и завршавају се на нултом сечењу (на коме је $\lambda = 0$), је још један пример простора који задовољава услове простора $\mathcal{P}_0$ у Теореми 1; критичне тачке функционала дејства на том простору су Хамилтонови путеви који почињу и завршавају се на нултом сечењу. $\sharp$

1.3. Тачне Лагранжеве подмногострукости. Лагранжеве подмногострукости, које смо увели Дефиницијом 2, су подмногострукости максималне димензије на којој се симплектичка форма анулира. Специфичност симплектичке структуре у котангентном раслојењу омогућава нам да у ту уведемо ужу класу Лагранжевих подмногострукости.

Дефиниција 9. Подмногострукост $L \subset T^*M$ је *тачна Лагранжева подмногострукост* ако је

(1) $\dim L = \dim M$;
(2) форма $j_L^*\lambda$ тачна,

где је $j_L : L \hookrightarrow T^*M$ инклузија. $\diamondsuit$

Из $j_L^*\omega = -dj_L^*\lambda$ следи да је свака тачна Лагранжева подмногострукост Лагранжева.

Пример 8. Нека је $s : M \to T^*M$ сечење котангентног раслојења, тј. 1–форма на M. Из Леме 2 следи да је $s(M)$ Лагранжева подмногострукост ако и само ако је s затворена форма, а тачна Лагранжева подмногострукост ако и само ако је форма s тачна. Специјално, нулто сечење дефинише тачну Лагранжеву подмногострукост $0_M \subset T^*M$, на којој је $\lambda = 0$. $\sharp$

Пример 9. Контрактибилна петља C на цилиндру $T^*\mathbb{S}^1$ је Лагранжева подмногострукост која није тачна. Лагранжева је зато што је TC раслојење ранга 1, а је ω антисиметрична форма, па се анулира на сваком једнодимензионом простору. Да C није тачна следи из Стоксове теореме: пошто је C контрактибилна, она ограничава диск D; површина тог диска је

$$P(D) = \iint_D \omega = -\oint_C \lambda,$$

па је $\lambda\big|_C \neq 0$. $\sharp$

Задатак 4. Доказати да је неконтрактибилна петља C на цилиндру $T^*\mathbb{S}^1$ тачна Лагранжева подмногострукост ако и само ако је површина између C и нултог сечења $0_{\mathbb{S}^1}$ изнад нултог сечења једнака површини између C и $0_{\mathbb{S}^1}$ испод нултог сечења. ✓

Тачност Лагранжеве подмногострукости се чува при Хамилтоновим деформацијама:

Лема 7. *Нека је $L \subset T^*M$ тачна Лагранжева подмногострукост и $\varphi_t : T^*M \to T^*M$ фамилија Хамилтонових дифеоморфизама. Онда је $\varphi_t(L)$ тачна Лагранжева подмногострукост за свако t.*

$\triangle$ Нека је $j_0 \hookrightarrow T^*M$ инклузија, $L_t = \varphi_t(L)$ и $j_t = \varphi_t \circ j_0$. Тада је

$$j_t^*\lambda - j_0^*\lambda = \int_0^t \frac{d}{ds} j_s^*\lambda\, ds = \int_0^1 j_s^* \left(\frac{dj_s}{ds} \lrcorner d\lambda + d\big(\frac{dj_s}{ds} \lrcorner \lambda\big) \right) ds.$$

Пошто је деформација j_s дефинисана помоћу Хамилтоновог дифеоморфизма са Хамилтонијаном H_s, први сабирак у последњем изразу је једнак $dj_s/ds \lrcorner \omega = dH_s$, па добијамо

$$j_t^*\lambda = j_0^*\lambda + d \int_0^t \left(H_s + \frac{dj_s}{ds} \lrcorner \lambda \right) ds.$$

Оба израза на десној страни су тачне форме. $\bigtriangledown$

Задатак 5. Доказати да нулто сечење тангентног раслојења $T^*\mathbb{S}^1$ не може да се раздвоји од себе Хамилтоновом деформацијом. ✓

Напомена 4. Важи и општије тврђење од Задатка 5: ако је M произвољна компактна многострукост, не постоји Хамилтонова деформација $\varphi_t : T^*M \to T^*M$, таква да је $\varphi_{t_0}(0_M) \cap 0_M = \emptyset$ за неко t_0. Постоји више доказа овог тврђења, сви су нетривијални. Први доказ дао је М. Громов у [**33**]. $\diamond$

Пример 10. Нека је M многострукост и $N \subset M$ њена подмногострукост. Тада је конормално раслојење

$$\nu^*N = \{\xi \in T_N^*M \mid \xi(TN) = \{0\}\}$$

тачна Лагранжева подмногострукост. Заиста, због $\pi_*(T\nu^*N) \subset TN$ рестрикција Лиувилове форме λ на ν^*N је једнака нули.

Два специјална случаја $N = M$, када је $\nu^*M = 0_M$, и $N = \{p\}$, када је $\nu^*\{p\} = T_p^*M$. $\sharp$

Задатак 6. Нека је $N \subset M$ и нека је $\eta \in \Omega^1(M)$ 1–форма на N. Дефинишимо раслојење

$$\nu_\eta^* N := \{\xi \in T_N^* M \mid \xi|_{TN} = \eta\}.$$

Доказати да је $\nu_\eta^* N$ Лагранжева подмногострукост ако и само ако је форма η затворена и да је $\nu_\eta^* N$ тачна Лагранжева подмногострукост ако и само ако је форма η тачна. Ово је уопштење Примера 8 и Примера 10. ✓

Тачне Лагранжеве многострукости су погодни гранични услови за примену Принципа најмањег дејства, некад у модификованој форми, који смо формулисали у Теореми 1. У Примеру 7 смо видели неке од граничних услова који обезбеђују да су екстремале функционала дејства Хамилтонови путеви, један од њих је био гранични услов

$$\gamma(0), \gamma(1) \in 0_M.$$

Општије, ако су N_0 и N_1 подмногострукости у M, онда *конормални гранични услови*

$$\gamma(i) \in \nu^* N_i, \qquad i \in \{0, 1\}$$

дефинишу простор путева $\mathcal{P}_0$ који има својство из Теореме 1, па су екстремале функционала дејства са тим граничним условима Хамилтонови путеви.

Нека је сада $j_L : L \hookrightarrow M$ произвољна тачна Лагранжева подмногострукост у T^*M и нека је f примитивна функција тачне форме $j_L^* \lambda$,

$$f : L \to \mathbb{R}, \qquad j_L^* \lambda = df.$$

Посматрајмо *Лагранжеве граничне услове*

$$\gamma(0) \in 0_M, \qquad \gamma(1) \in L$$

Из формуле варијације функционала дејства (21) следи да је

$$d\mathcal{A}(\xi) = -\int_0^1 \omega(\xi, \dot{\gamma} - X_{H_t}(\gamma)) + df(\gamma(1))\xi.$$

Одатле видимо да, да бисмо добили Хамилтонове путеве као екстремале, треба да модификујемо функционал дејства и уместо $\mathcal{A}_H$ посматрамо

$$\mathcal{A}_H^f(\gamma) := \mathcal{A}_H(\gamma) - f(\gamma(1)).$$

На сличан начин се модификује функционал дејства ако су оба гранична услова тачне Лагранжве подмногострукости L_0 и L_1: да би екстремале на простору путева са Лагранжевим граничним условима $\gamma(i) \in L_i$ за $i \in \{0, 1\}$ били Хамилтонови путеви, потребно је посматрати модификовани функционал дејства $\mathcal{A}_H^{f_0, f_1}(\gamma) := \mathcal{A}_H(\gamma) - f_1(\gamma(1)) + f_0(\gamma(0))$.

Посматрајмо сада простор глатких путева са граничним условом на само једном крају:

$$\mathcal{E} := \{\gamma : [0, 1] \to T^*M \mid \gamma(0) \in 0_M\}.$$

Простор $\mathcal{E}$ је (бесконачно димензионо) раслојење над M; пројекција је задата са

$$\Pi : \mathcal{E} \to M, \qquad \Pi(\gamma) = \pi(\gamma(1)),$$

где је $\pi : T^*M \to M$ канонска пројекција. Влакно овог раслојења над тачком $q \in M$ је простор путева који почињу на 0_M, а завршавају се на T^*_qM. Посматрајмо функционал дејства на овом раслојењу:

$$\mathcal{A}_H : \mathcal{E} \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{A}_H(\gamma) = \int_0^1 \gamma^*\lambda - H \circ \gamma \, dt.$$

Из формуле варијације (21) следи да су нуле *вертикалног извода* овог функционала у тачки γ, тј. извода рестрикције на влакно $\Pi^{-1}(\gamma(1))$, Хамилтонови путеви, јер се ради о конормалним граничним условима $(0_M, T^*_{\pi(\gamma(1))}M)$. Означимо скуп критичних тачака у вертикалном правцу са

$$\Sigma_{\mathcal{A}_H} := \{\gamma \in \mathcal{E} \mid d_{\mathrm{vert}}\mathcal{A}_H(\gamma) = 0\} \subset \mathcal{E}.$$

За $\gamma \in \Sigma_{\mathcal{A}_H}$ извод $d\mathcal{A}_H(\gamma)$ има само хоризонталну компоненту:

$$\gamma \in \Sigma_{\mathcal{A}_H} \;\Rightarrow\; d\mathcal{A}_H(\gamma) = \lambda(\gamma(1)).$$

Посматрајмо пресликавање

$$i_{\mathcal{A}_H} : \Sigma_{\mathcal{A}_H} \to T^*M, \qquad \gamma \mapsto d\mathcal{A}_H(\gamma). \tag{22}$$

По дефиницији, Лиувилова форма дејствује по правилу $\lambda(\gamma(1)) = \gamma(1) \circ \pi_*$, па можемо да кажемо да је[4] $i_{\mathcal{A}_H}(\gamma) = \gamma(1)$. Ако означимо са L Лагранжеву подмногострукост која се добије Хамилтоновом деформацијом нултог сечења, дефинисаном Хамилтонијаном H, односно $L := \varphi_1(0_M)$, где је φ_t Хамилтонова деформација (14), онда је

$$i_{\mathcal{A}_H}(\Sigma_{\mathcal{A}_H}) = L. \tag{23}$$

Добијени резултат уопштава Пример 8 на следећи начин. Сечење раслојења T^*M је тачна Лагранжева подмногострукост ако и само ако је добијено као диференцијал функције $f : M \to \mathbb{R}$. Хамилтонова деформација L нултог сечења је, на основу Леме 7, тачна Лагранжева подмногострукост, али не мора да буде сечење (пројекција $\pi\big|_L$ не мора да буде инјективна). Тим пре не мора да буде добијено ни као диференцијал функције дефинисане на M. Међутим, из (22) и (23) видимо да L можемо да представимо помоћу диференцијала функције дефинисане на раслојењу $\mathcal{E}$ над M. Тако долазимо до следеће дефиниције.

Дефиниција 10. Лагранжева подмногострукост $L \subset T^*M$ је задата *генеришућом функцијом*, ако постоји раслојење E над базом M и функција $S : E \to \mathbb{R}$, таква да је скуп

$$\Sigma_S := \{e \in E \mid d_{\mathrm{vert}}S(e) = 0\}$$

подмногострукост у E, а пресликавање

$$i_S : \Sigma_S \to T^*M, \qquad i_s(e) = dS(e)$$

улагање, такво да је $L = i_S(\Sigma_S)$. $\Diamond$

[4] Ако је $S : E \to \mathbb{R}$ функција на произвољном раслојењу $\Pi : E \to M$ и ако је њен вертикални извод у тачки e једнак нули, онда је за $X \in T_qM$, $q = \Pi(e)$, функционал $dS(e)$ константан на скупу $\{\Pi_*^{-1}X\}$, јер се сви елементи тог скупа разликују само за вертикалну компоненту. Одатле следи да је , па је $X \mapsto dS(e)(\Pi_*^{-1}X)$ добро дефинисано пресликавање на T_qM, па $dS(e)$ може да се сматра елементом простора T^*_qM.

Напомена 5. Ако је $\Pi(e) = q$ и ако је $e = (q, \xi)$ у локалним координатама на E, онда је

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial S}{\partial q}\, dq.$$

На Σ_S је $\frac{\partial S}{\partial \xi} = 0$, па је

$$i_S(e) = \frac{\partial S}{\partial q}(e)\, dq \in T^*M.$$

У локалним координатама на T^*M је $\lambda = pdq$, па је

$$i_S^*\lambda = dS. \tag{24}$$

Приметимо да из (24) следи и да Лагранжева подмногострукост која није тачна не може да се представи генеришућом функцијом. ◇

Напомена 6. Има много користи од представљања Лагранжевих подмногострукости генеришућим функцијама; ради мотивације навешћемо само једну. У Леми 1 на стр. 124 смо показали да симетрије симплектичких многострукости, симплектоморфизми, могу да се опишу у терминима Лагранжевих подмногострукости. Симплектоморфизам на симплектичкој многострукости димензије $2n$ се задаје, локално, са $2n$ координатних функција. Уколико његов график (локално, дакле у $\mathbb{R}^{2n} \cong T^*\mathbb{R}^n$) можемо да представимо помоћу генеришуће функције, добијемо много једноставнији опис, помоћу само једне уместо $2n$ функција. Приметимо да (22), (23) можемо да сматрамо уопштењем представљања тачних симплектоморфизама помоћу генеришуће функције S_t изведене из функционала дејства у (20). ◇

Задатак 7. Посматрајмо раслојење $E = \mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_\xi$ над $M = \mathbb{R}_q$ (индекс указује на то како ћемо да означавамо променљиве базе и влакна; у оба случаја се ради о реалним правама). Нацртати скупове

$$\Sigma_S \subset E = \mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_\xi \qquad \text{и} \qquad L := i_S(\Sigma_S) \subset T^*M = \mathbb{R}_q \times \mathbb{R}_p,$$

ако је

(а) $S(q, \xi) = \frac{\xi^3}{3} - q\xi$;

(б) $S(q, \xi) = \frac{\xi^3}{3} + q^2\xi - \xi$. ✓

Из претходног задатка видимо да $i_S(\Sigma_S)$ у општем случају не мора да буде подмногострукост. Али, Лагранжево својство има смисла и у широј класи.

Дефиниција 11. Имерзија $j_L : L \to T^*M$ се назива *Лагранжевом* ако је $j_L^*\lambda$ затворена форма (тј. ако је $j_L^*\omega = 0$), а *тачном Лагранжевом* ако је форма $j_L^*\lambda$ тачна. ♢

Теорема 2. *Нека је $E \to M$ раслојење над M и $S : E \to \mathbb{R}$ глатка функција, таква да је њен извод у вертикалном правцу*

$$d_{\mathrm{vert}}S : E \to E^*$$

трансверзалан на нулто сечење дуалног раслојења E^*. Тада је

$$\Sigma_S := \{e \in E \mid d_{\mathrm{vert}}S(e) = 0\}$$

подмногострукост у E, а

$$i_S : \Sigma_S \to T^*M, \qquad i_S(e) = dS(e)$$

тачна Лагранжева имерзија.

$\triangle$ Да је Σ_S подмногострукост следи из трансверзалности извода у вертикалном правцу на нулто сечење у E^* и Теореме 5 на стр. 11.

Подмногострукост Σ_S је дата једначином $\frac{\partial S}{\partial \xi} = 0$, па је тангентни простор у тачки $e = (q, \xi)$ дефинисан условом $T_e = \ker d(\frac{\partial S}{\partial \xi})$, односно једначином

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \xi}, \frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2}\right) \cdot (\dot{q}, \dot{\xi}) = 0. \tag{25}$$

Докажимо да је i_S имерзија. Ово је локално питање, па можемо да га размотримо у локалној тривијализацији раслојења E, у којој је

$$i_S(q, \xi) = \left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) \qquad \text{и} \qquad (i_S)_*(\dot{q}, \dot{\xi}) = \frac{\partial^2 S}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 S}{\partial \xi \partial q}\dot{\xi}, \tag{26}$$

за $(\dot{q}, \dot{\xi}) \in T_e\Sigma$. Нека је $(i_S)_*(e)(\dot{q}, \dot{\xi}) = 0$. Из (26) следи да је тада

$$\dot{q} = 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial \xi \partial q}\dot{\xi} = 0. \tag{27}$$

Пошто је $(\dot{q}, \dot{\xi}) = (0, \dot{\xi}) \in T_e\Sigma_S$, из (25) следи да је

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2}\dot{\xi} = 0. \tag{28}$$

Међутим, вектор $(0, \dot{\xi})$ је вертикалан, а трансверзалност извода $\frac{\partial S}{\partial \xi}$ на нулто сечење значи да је $\frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2}$ изоморфизам вертикалних простора раслојења E и E^*. Одатле следи да је $\dot{\xi} = 0$, што нас заједно са $\dot{q} = 0$ из (27) доводи до закључка

$$\ker (i_S)_*(e) = \{0\} \qquad \text{за све} \qquad e \in \Sigma_S.$$

Тиме је доказано да је i_S имерзија. Чињеница да је ова имерзија тачна Лагранжева следи из (24). $\triangledown$

Лема 8. *Нека је $L \hookrightarrow T^*M$ Лагранжева имерзија која може да се представи генеришућом функцијом S. Тада постоји бијекција између скупа критичних тачака функције S и скупа тачака пресека $L \cap 0_M$.*

$\triangle$ Доказ следи из дефиниције скупа Σ_S и пресликавања i_S. $\triangledown$

Задатак 8. Нека је $L \hookrightarrow T^*M$ која може да се представи генеришућом функцијом, таква да је $L \cap 0_M \neq \emptyset$, и нека су $x, y \in L \cap 0_M$ две тачке. Доказати да разлика $S(e_S^x) - S(e_S^y)$, где су $e_S^x, e_S^y \in \Sigma_S$ критичне тачке из Леме 8 које одговарају тачкама x, y, не зависи од избора функције S која генерише L. ✓

Лема 8 може да се искористи за доказ тврђења, које смо споменули у Напомени 4, да Хамилтонова деформација не може да раздвоји нулто сечење од себе. За то су нам потребне следећа дефиниција и теорема.

Дефиниција 12. *Квадратна форма* на векторском раслојењу E ранга r над M је пресликавање $Q : E \to \mathbb{R}$ добијено од неке квадратне форме q у $\mathbb{R}^r$ помоћу разлагања јединице на многострукости M. Функција $S : E \to \mathbb{R}$ на E је *квадратна у бесконачности*, ако постоји компактан скуп $K \subset E$ и недегенерисана квадратна форма Q на E, таква да је $S(e) = Q(e)$ за $e \notin K$. $\Diamond$

Теорема 3. *Нека је M компактна многострукост и нека је $L \subset T^*M$ Хамилтонова деформација нултог сечења, тј. нека је $L = \varphi_1(0_M)$ за неку фамилију φ_t Хамилтонових дифеоморфизама. Тада је L Лагранжева подмногострукост која може да се представи генеришућом функцијом квадратном у бесконачности.*

△ Скицираћемо доказ [**38**], заснован на идеји изломљених геодезијских линија [**24, 25**], који даје конструкцију генеришуће функције S као дискретне верзије функционала дејства $\mathcal{A}_H$, где је H Хамилтонијан који генерише фамилију φ_t. Идеја се састоји у томе да се од генеришуће функције (22), дефинисане на бесконачно димензионом раслојењу (простору путева), конструише функционал дефинисан на коначно димензионом векторском раслојењу, које се поистовећује са изломљеним Хамилтоновим путевима.

Нека је $E = (TM)^{N-1} \otimes (T^*M)^{N-1}$. Тачки

$$e = (q_0, X_1, \ldots, X_{N-1}, P_1, \ldots, P_{N-1}), \quad \text{за} \quad q_0 \in M, \quad X_i \in T_{q_0}M, P_i \in T^*_{q_0}M,$$

придружујемо Хамилтонов пут изломљен на N делова на следећи начин. Нека је $\gamma_1(t)$, $0 \le t \le 1/N$ јединствени Хамилтонов пут у T^*M који полази из тачке $q_0 \in 0_M$ и нека је $\gamma_1(1/N) = (q_1^-, p_1^-)$ крајња тачка тог пута. Нека је $\overline{X}_1 \in T_{q_1^-}M$ вектор добијен паралелним преносом, у односу на Леви–Чивитину конексију, вектора $X_1 \in T_{q_0}M$ дуж γ_1, а $\overline{P}_1 \in T^*_{q_1^-}M$ ковектор добијен паралелним преносом ковектора $P_1 \in T^*_{q_0}M$. Нека је

$$q_1^+ := \exp_{q_1^-}(\overline{X}_1), \qquad p_1^+ := (d\exp^{-1}_{q_1^-}\overline{X}_1)^*(\overline{P}_1).$$

Нека је $\gamma_2(t)$, за $1/N \le t \le 2/N$, Хамилтонов пут који полази из тачке $(q_1^+, p_1^+) \in T^*M$. Све векторе и ковекторе из q_0 можемо паралелно да пренесемо у q_1^+, дуж γ_1 и радијалне геодезијске између q_1^- и q_1^+. Поновимо сада исти поступак. Добијамо изломљену Хамилтонову орбиту $(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$.

Дефинишимо функцију $S : E \to \mathbb{R}$ са

$$S(e) := \sum_{k=1}^{N-1} \langle X_k, P_k \rangle + \sum_{k=1}^{N} \mathcal{A}_H(\gamma_k).$$

Вертикални извод функције S је једнак нули у тачкама e које дефинишу неизломљене трајекторије, па доказ следи из чињенице да (22) генерише L. ▽

Последица 2. *Нулто сечење котангентног раслојења компактне многострукости не може да се раздвоји од себе Хамилтоновом деформацијом.*

△ Из Теореме 3 следи да је Хамилтонова деформација нултог сечења задата генеришућом функцијом квадратном у бесконачности. Пошто је извод квадратне функције различит од нуле, скуп $\Sigma_S = \{e \in E \mid d_{\mathrm{vert}}S(e) = 0\}$ је компактан, па рестрикција функције S на Σ_S има критичних тачака. Одатле и из Леме 8 следи да је скуп $L \cap 0_M$ непразан. ▽

2. Симплектичке многострукости

2.1. Примери. До сада смо видели неколико примера симплектичких многострукости. Један од њих су оријентабилне површи, на којима је 2–форма оријентације симплектичка форма. Важан пример су котангентна раслојења T^*M, где је M произвољна глатка многострукост. Специјално, за $M = \mathbb{R}^n$,

$T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ је симплектичка многострукост. Последњи пример може да се посматра у склопу комплексне геометрије, тј. као $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$. Комплексни n–димензиони простор $\mathbb{C}^n$ снабдевен је ермитском формом

$$\langle z, w\rangle = z_1\overline{w}_1 + \ldots + z_n\overline{w}_n, \quad \text{за} \quad z = (z_1, \ldots, z_n), \quad z = (w_1, \ldots, w_n).$$

Ако у претходној једнакости раздвојимо реални и имагинарни део комплексне билинеарне форме $\langle z, w\rangle$, добијамо

$$\langle z, w\rangle = g(z, w) + i\omega(z, w), \tag{29}$$

где је $g(z, w) := \mathrm{Re}\,\langle z, w\rangle$, $\omega(z, w) := \mathrm{Im}\,\langle z, w\rangle$. Израз (29) повезује четири структуре у $\mathbb{C}^n$: Риманову (тј. еуклидску) метрику g, симплектичку форму ω, ермитску форму $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и комплексну структуру $i = \sqrt{-1}$. Унитарна линеарна пресликавања чувају ермитску форму, ортогонална чувају еуклидску метрику, симплеткича чувају симплектичку форму и комплексно линеарна пресликавања чувају комплексну структуру. Зато из (29) следи

$$U(n) = O(2n) \cap Sp(2n) = Sp(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = GL(n, \mathbb{C}) \cap O(2n).$$

Уопштење многострукости $\mathbb{C}^n$ су *Келерове многострукости.* Уводимо их следећим дефиницијама.

Дефиниција 13. *Комплексна многострукост* је многострукост M димензије $2n$, за коју постоји атлас чије су карте $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ такве да су

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

бихоломорфна пресликавања[5]. $\diamondsuit$

Холоморфност карата омогућава нам да, помоћу множења са $i = \sqrt{-1}$ у картама, на тангентном раслојењу комплексне многострукости дефинишемо пресликавање

$$J : TM \to TM$$

које је линеарно на влакнима и за које важи $J^2 = -\mathrm{id}_{TM}$. Ово пресликавање називамо *комплексном структуром* на комплексној многострукости M. Помоћу комплексне структуре можемо да дефинишемо појам холоморфног пресликавања комплексних многострукости: ако су J_N и J_M комплексне структуре на N и M, глатко пресликавање $F : N \to M$ је *холоморфно*, ако је $F_* \circ J_N = J_M \circ F_*$. Ова дефиниција уопштава дефиницију холоморфности пресликавања $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ као глатког пресликавања са $\mathbb{C}$–линеарним изводом. Еквивалентно, пресликавање комплексних многострукости је холоморфно ако је холоморфно у картама из Дефиниције 13.

Помоћу разлагања јединице, на свакој комплексној многострукости M можемо да дефинишемо ермитску структуру $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (као што на свакој реалној многострукости можемо да дефинишемо Риманову метрику). Као и у случају многострукости $\mathbb{C}^n$, ермитска структура има реални део g, и имагинарни део ω. Лако је видети да је билинеарна форма g симетрична (па дефинише Риманову метрику на M), а ω антисиметрична (па је $\omega \in \Omega^2(M)$).

[5]Ако је $U \subset \mathbb{C}^n$, пресликавање $f : U \to \mathbb{C}^m$ је *холоморфно у тачки* $a \in U$ ако је његов извод $Df(z)$ комплексно линеаран у некој околини тачке a, тј. ако постоји околина $V \ni a$, таква да за $z \in V$ $Df(z)$ комутира са $i = \sqrt{-1}$: $Df(z)(i\xi) = iDf(z)(\xi)$

Дефиниција 14. Комплексна многострукост M је *Келерова* ако је на TM задата глатка фамилија ермитских форми, чији је имагинарни део ω затворена 2–форма: $d\omega = 0$. $\Diamond$

Наравно, Келерове многострукости су симплектичке: ω је симплектичка форма. Ова форма на Келеровим многострукостима назива се *Келеровом формом.* Приметимо да Келерова форма ω дефинише, уз помоћ комплексне структуре J, Риманову метрику $g(X,Y) := \omega(X, JY)$, а тиме и ермитску форму $\langle\cdot,\cdot\rangle := g(\cdot,\cdot) + i\omega(\cdot,\cdot)$.

Лема 9. *Комплексна подмногострукост Келерове многострукости је Келерова многострукост.*

$\triangle$ Ако је ω Келерова форма на N и $\jmath : M \hookrightarrow N$ холоморфно улагање, онда је $\jmath^*\omega$ Келерова форма на M. $\bigtriangledown$

Пример 11. Нека су

$$f_1, \dots, f_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

холоморфне функције n променљивих ($\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_j} = 0$). Ако су ове функције функционално независне, тј. ако је $df_1 \wedge \dots \wedge df_k \neq 0$, из Теореме о рангу (у комлексној верзији) следи да је

$$M = \{z \in \mathbb{C}^n \mid f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0\}$$

комплексна подмногострукост комплексне кодимензије k у $\mathbb{C}^n$, тј. реалне димензије $2(n-k)$. Ова многострукост је Келерова; Келерова форма на M је рестрикција стандардне Келерове форме $dq_1 \wedge dp_1 + \ldots + dq_n \wedge dp_n$ у $\mathbb{C}^n$. $\sharp$

Комплексне многострукости о којима је реч у Примеру 11 су некомпактне. Не постоје затворене (тј. компактне без границе) комплексне подмногострукост у $\mathbb{C}^n$. Заста, ако је M компактна, а $\jmath : M \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ холоморфно улагање, онда функција $p \mapsto |\jmath(p)|$ достиже максимум у некој тачки $p_0 \in M$. Међутим, p_0 је унутрашња тачка неке карте, што је у супротности са Принципом максимума модула за холоморфне функције.

Ни симплектичке многострукости не могу да се реализују као симплектичке подмногострукости у $\mathbb{C}^n$, уколико су компактне. Ако је M симплектичка многострукост са симплектичком формом ω и $\jmath : M \to \mathbb{C}^n$ симплектичко улагање, онда је

$$\omega = \jmath^*(dq_1 \wedge dp_1 + \ldots + dq_n \wedge dp_n) = d(-\jmath^*\lambda),$$

где је $\lambda = p_1\, dq_1 + \ldots + p_n\, dq_n$ Лиувилова форма на $\mathbb{C}^n \cong T^*\mathbb{R}^n$. Одатле следи да је $\omega^{\wedge n} = d(\lambda \wedge \omega^{\wedge n-1})$, па M има тачну форму запремине. Из Стоксове теореме следи да M тада не може да буде компактна.

Пример 12. **(Комплексни пројективни варијетети)** Комплексни пројективни простор $\mathbb{C}P^n$ је компактна Келерова многострукост. Келерова форма на њој, која је позната као *Фубини–Студијева форма*, је дефинисана са

$$\omega := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\|z\|^2,$$

где је $z = [z_0 : \ldots : z_n]$, $\|z\|^2 = |z_0|^2 + \ldots + |z_n|^2$ и

$$\partial g := \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial z_k}dz_k, \qquad \overline{\partial} g := \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial \overline{z}_k}d\overline{z}_k.$$

Ова форма је добро дефинисана, тј. независна од избора пројективних координата $[z_0 : \ldots : z_n]$, јер се прелазак на друге пројективне координате остварује преласком на $[fz_0 : \ldots : fz_n]$, где је f холоморфна функција, па је

$$\partial\overline{\partial}\log\|fz\|^2 = \partial\overline{\partial}\log\|z\|^2 + \partial\overline{\partial}(\log f + \log\overline{f}).$$

Пошто је f холоморфна функција, за њу је $\overline{\partial}f = 0$, па је други сабирак на десној страни једнак нули.

Ако је $P : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ хомогени полином, онда је

$$P(\lambda z_0, \cdots, \lambda z_n) = \lambda^s P(z_0, \cdots, z_n),$$

па је $P(z_0, \ldots, z_n) = 0$ добро дефинисана једначина на $\mathbb{C}P^n$.

Нека су $P_1, \ldots, P_k : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ хомогени полиноми

$$M = \{[z_0 : \ldots : z_n] \mid P_1(z_0, \ldots, z_n) = \ldots = P_k(z_0, \ldots, z_n) = 0\}$$

назива се *комплексним пројективним варијететом.* Комплексни пројективни варијетет називамо *глатким*, ако је он глатка многострукост. Глатки комплексни пројективни варијетети су компактне Келерове многострукости. $\sharp$

Пример 13. (Коадјунговане орбите) У Глави 1 смо дефинисали адјунговану репрезентацију Лијеве групе G,

$$\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$$

(видети (77) на стр. 112). Извод пресликавања Ad у јединици $e \in G$ је пресликавање

$$\mathrm{ad} := \mathrm{Ad}_*(e) : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}).$$

Оно може да се израчуна експлицитно: $\mathrm{ad}_X Y = [X, Y]$.

За $g \in G$ дефинишимо линеарно пресликавање

$$K(g) : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$$

са

$$\langle K(g)\xi, X\rangle = \langle \xi, \mathrm{Ad}(g^{-1})X\rangle$$

Тиме је дефинисано *коадјунговано дејство*

$$K : G \to GL(\mathfrak{g}^*).$$

Његов извод у e у правцу $X \in \mathfrak{g}$ је пресликавање

$$K_*(X) : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$$

дато са

$$\langle K_*(X)\xi, Y\rangle = \langle \xi, -\mathrm{ad}(X)Y\rangle = \langle \xi, [Y, X]\rangle.$$

За $\xi \in \mathfrak{g}^*$, *коадјунгована орбита* $\mathcal{O}(\xi)$ је слика пресликавања

$$G \to \mathfrak{g}^*, \qquad g \mapsto K(g)\xi.$$

Ако је G_ξ стабилизатор тачке ξ при коадјунгованом дејству, онда је $\mathcal{O}(\xi) \cong G/G_\xi$.

Билинеарна форма Ω_ξ на $\mathfrak{g}$, дефинисана са

$$\Omega_\xi(X, Y) := \langle \xi, [X, Y]\rangle$$

има следећа својства:

(1) $\Omega_\xi(X, Y) = -\Omega_\xi(Y, X)$;
(2) $\ker(X \mapsto X \lrcorner \Omega_\xi) = \mathfrak{g}_\xi$, где је $\mathfrak{g}_\xi$ Лијева алгебра Лијеве групе G_ξ;

(3) Ω_ξ је инваријантна у односу на дејство групе G_ξ, тј.

$$\Omega_\xi(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y) = \Omega_\xi(X,Y) \qquad \text{за све} \qquad g \in G_\xi.$$

Одатле следи да пресликавање

$$\mathfrak{g} \mapsto T_\xi \mathcal{O}(\xi), \qquad X \mapsto K_*(X)\xi$$

остварује идентификацију $T_\xi\mathcal{O}(\xi) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\xi$ и да је са

$$\omega_\xi(K_*(X), K_*(Y)) := \Omega_\xi(X,Y)$$

дефинисана форма $\omega_\xi \in \Omega^2(\mathcal{O}(\xi))$ која је недегенерисана и G–инваријантна. Ова форма се назива *Кирилов–Костант–Суриоовом формом*; пар $(\mathcal{O}(\xi), \omega_\xi)$ је симплектичка многострукост са симплектичким дејством групе G. $\sharp$

Задатак 9. Извести доказ да је ова форма симплектичка. Упутство: за затвореност искористити Лему 2 на стр. 24. ✓

2.2. Симплектоморфизми. *Симплектички дифеоморфизми*, или *симплектоморфизми* су симетрије симплектичке геометрије. Прецизније:

Дефиниција 15. Дифеоморфизам $\varphi : M \to N$ симплектичких многострукости (M, ω_M) и (N, ω_N) је симплектоморфизам ако је $\varphi^*\omega_N = \omega_M$.

Специјално, ако је (M,ω) симплектичка многострукост, дифеоморфизам $\varphi : M \to M$ је симплектоморфизам ако је $\varphi^*\omega = \omega$; скуп свих симплектоморфизама симплектичке многострукости (M,ω) означавамо са $\mathrm{Symp}(M,\omega)$ или, краће, $\mathrm{Symp}(M)$. Компоненту путне повезаности скупа $\mathrm{Symp}(M)$ која садржи идентичко пресликавање $\mathrm{id} : M \to M$, односно скуп симплектоморфизама $x \mapsto \varphi(x)$ за које постоји глатко (по t и x) пресликавање

$$[0,1] \times M \ \ni (t,x) \mapsto \varphi_t(x) \ \in M, \qquad \varphi_0 = \mathrm{id}, \qquad \varphi_1 = \varphi,$$

означавамо са $\mathrm{Symp}_0(M)$, или $\mathrm{Symp}_0(M,\omega)$. $\Diamond$

Из $(\phi \circ \psi)^*\omega = \psi^*(\phi^*\omega)$ следи да је $\mathrm{Symp}(M)$ подгрупа групе дифеоморфизама, у односу на операцију слагања пресликавања. Лако је видети да је $\mathrm{Symp}_0(M)$ подгрупа групе $\mathrm{Symp}(M)$.

Група $\mathrm{Symp}(M)$ је подгрупа дифеоморфизама који чувају запремину; прецизније, важи следећа теорема.

Теорема 4. (Лиувил) *Нека је (M,ω) симплектичка многострукост димензије $2n$ и $\Omega = \frac{1}{n!}\omega^{\wedge n}$ канонска форма запремине. Тада свако $\psi \in \mathrm{Symp}(M)$ чува форму Ω: $\psi^*\Omega = \Omega$.*

$\triangle$ Доказ следи из $\psi^*(\omega^{\wedge n}) = (\psi^*\omega)^{\wedge n}$. $\triangledown$

Задатак 10. Доказати да симплектоморфизми $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, у односу на стандардну симплектичку форму на $\mathbb{C}^n = T^*\mathbb{R}^n$, чувају збир површина пројекција дводимензионих подмногострукости $\Sigma \subset \mathbb{C}^n$ на комплексне координатне равни. Примером показати да симплектоморфизми не морају да чувају површине сваке од тих пројекција. ✓

Инфинитезимални опис, тј. опис на језику векторских поља, подгрупе $\mathrm{Symp}_0(M)$ можемо да добијемо ако за пут $t \mapsto \varphi_t$ у њој диференцирамо једнакост

$$\varphi_t^*\omega = \omega$$

по t. Применом Картанове формуле добијамо $X_t \lrcorner d\omega + d(X_t \lrcorner \omega) = 0$, где је X_t векторско поље дефинисано са

$$X_t(\varphi_t(x)) = \frac{d\varphi_t(x)}{dt}.$$

Пошто је $d\omega = 0$, добијамо

$$d(X_t \lrcorner \omega) = 0. \tag{30}$$

Обрнуто, нека је X_t векторско поље које глатко зависи од параметра $t \in I$ из интервала $I \subset \mathbb{R}$ који садржи нулу. Претпоставимо да оно задовољава (30) и додатни услов да је његов носач компактан, тј. да постоји компактан подскуп $K \subset M$ такав да је $\operatorname{supp} X_t \subset K$ за све $t \in I$. Тада је решење диференцијалне једначине

$$\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = X_t(\varphi_t(x)), \qquad \varphi_0(x) = x \tag{31}$$

дефинисано за све $t \in I$ и сви φ_t су симплектоморфизми. Израз (31) можемо да посматрамо као фамилију диференцијалних једначина на M, параметризовану тачкама многострукости M тако да свако x дефинише почетни услов $\varphi_0(x) = x$, или као једну диференцијалну једначину[6]

$$\frac{d\varphi_t}{dt} = X_t \circ \varphi_t, \qquad \varphi_0 = \mathrm{id}$$

на $\mathrm{Symp}_0(M)$.

Носач тако добијених симплектоморфизама, тј. скуп

$$\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in M \mid \varphi(x) \neq x\}}$$

је компактан. Подгрупу групе $\mathrm{Symp}_0(M)$ која се састоји од симплектоморфизама са компактним носачем означавамо са $\mathrm{Symp}_0^c(M)$.

Дефиниција 16. Векторско поље са компактним носачем које задовољава (30) називамо *симплектичким векторским пољем.* $\Diamond$

Уколико услов (30) затворености форме $X_t \lrcorner \omega$ заменимо јачим условом тачности, добијамо подскуп скупа $\mathrm{Symp}_0^c(M)$ који издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 17. Фамилија $\varphi_t \in \mathrm{Symp}_0^c(M)$ дефинисана диференцијалном једначином (31) се назива *Хамилтоновим током* на симплектичкој многострукости M ако је форма $X_t \lrcorner \omega$ тачна, тј. ако је

$$X_t \lrcorner \omega = dH_t$$

за неку глатку функцију

$$I \times M \ \ni (t, x) \mapsto H_t(x) \ \in \mathbb{R}$$

са компактним носачем, где је dH_t диференцијал по x, за фиксирано t.

Функцију H_t називамо *Хамилтоновом функцијом* или *Хамилтонијаном*, а векторско поље X_t *Хамилтоновим векторским пољем* или *симплектичким*

[6]Овај други поглед на једначину (31) је не поједностављује. Напротив, ускоро ћемо видети да је $\mathrm{Symp}_0(M)$ простор бесконаче димензије, а на таквим просторима теорија диференцијалних једначина је знатно сложенија. Међутим, за стицање интуиције о групи симплектоморфизама је корисно имати на уму и овај други поглед.

градијентом функције H_t и означавамо га и са X_{H_t} или X_H. Диференцијалну једначину

$$\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = X_H(\varphi_t(x)), \qquad \varphi_0(x) = x$$

Називамо *Хамилтоновом једначином.*

Задатак 11. Нека су (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2) симплектичке многострукости и $\psi : M_1 \to M_2$ дифеоморфизам. Доказати да је ψ симплектоморфизам (тј. $\psi^*\omega_2 = \omega_1$) ако и само ако је

$$\psi_*(X_{H\circ\psi}) = X_H \circ \psi$$

за све $H \in C^\infty(M_2)$. ✓

За фиксирано $t \in I$ дифеоморфизам φ_t називамо *Хамилтоновим дифеоморфизмом.* Скуп Хамилтонових дифеоморфизама означавамо са $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ или $\mathrm{Ham}(M)$. $\Diamond$

Напомена 7. Нека је φ_t Хамилтонов ток генерисан Хамилтонијаном $H_t(x)$ и дефинисан за $t \in [0, c]$. Диференцирањем $\varphi_{ct}(t)$ по t и применом Дефиниције 17 закључујемо да је $\varphi_{ct}(t)$ Хамилтонов ток генерисан Хамилтонијаном $cH_{ct}(x)$ и дефинисан за $t \in [0, 1]$. Одатле следи да Хамилтонове дифеоморфизме можемо да дефинишемо и као пресликавања φ_1, где је φ_t Хамилтонов ток дефинисан на интервалу $[0, 1]$. $\diamond$

Пример 14. Посматрајмо комплексну раван $\mathbb{C}$ као симплектичку многострукост са симплектичком формом $\omega = dx \wedge dy$. Диференцијал функције

$$H : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \qquad H(z) = \mathrm{Im}\, z$$

је, у координатама $z = x + iy$, $dH = dy$. Из недегенерисаности симплектичке структуре следи да је са

$$X_H \lrcorner \omega = dH$$

дефинисано јединствено векторско поље X_H. Ово поље можемо и експлицитно да израчунамо: $X_H = \frac{\partial}{\partial x}$. Његове интегралне криве су транслације у правцу паралелном реалној оси. $\sharp$

Напомена 8. Приметимо да, иако је форма $X_H \lrcorner \omega$ у Примеру 14 тачна, транслације нису Хамилтонови дифеоморфизми у смислу Дефиниције 17, пошто функција H нема компактан носач. Иако се некад и такви симплектоморфизми називају Хамилтоновим, ми ћемо се у овом тексту држати конвенције из Дефиниције 17 која је згодна због тога што нам омогућава да решења Хамилтонових једначина сматрамо дефинисаним на целом $\mathbb{R}$. $\diamond$

Тврђење 5. *Нека је $H : M \to \mathbb{R}$ глатка функција и X_H јединствено векторско поље дефинисано са*

$$X_H \lrcorner \omega = dH.$$

Тада је функција H константна дуж интегралних трајекторија векторског поља X_H. Прецизније, ако је крива γ решење диференцијалне једначине

$$\frac{d\gamma}{dt} = X_H(\gamma(t)),$$

онда је $H(\gamma(t)) \equiv const.$

$\triangle$ Доказ следи из $\frac{d}{dt}(H \circ \gamma) = dH(\frac{d\gamma}{dt}) = dH(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0.$ $\bigtriangledown$

Напомена 9. Тврђење 5 је у Класичној механици познато под именом Закон очувања енергије. Приметимо да оно важи само ако Хамилтонијан не зависи од t, тј. ако се укупна енергија система не мења са временом. Овакви системи се називају *аутономним*. $\sharp$

Пример 15. Диференцијал функције

$$H : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \qquad H(z) = \frac{1}{2}|z|^2$$

је $dH = xdx + ydy$. Векторско поље дефинисано са $X_H \lrcorner \omega = dH$ је

$$X_H(x, y) = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \theta},$$

где је $\theta = \operatorname{Arg} z$ поларна координата (угао са позитивним делом x–осе). Интегралне криве векторског поља X_H су ротације комплексне равни око координатног почетка. Пошто је форма $X_H \lrcorner \omega$ тачна, па тиме и затворена, следи да су ротације симплектоморфизми. Напомена 8 важи и за овај пример. $\sharp$

Задатак 12. Из Тврђења 5 следи да су трајекторије система из Примера 15, као геометријска места тачака, исте као трајекторије система дефинисаног функцијом $K(z) = |z|^4$. У чему се оне разликују? Нађи експлицитну једначину интегралних трајекторија векторског поља X_K. ✓

Пример 16. Из Примера 14 и 15 следи да су транслације у правцу произвољног вектора генерисане векторским пољем X, таквим да је $X \lrcorner \omega$ тачна форма, па су све транслације равни $\mathbb{R}^2$ симплектоморфизми. Одатле следи и да су транслације еуклидског простора $\mathbb{R}^{2n}$ симплектоморфизми, генерисани векторским пољем X за које је $X \lrcorner \omega$ тачна форма.

Међутим, ротације еуклидског простора $\mathbb{R}^{2n}$ (матрице из $SO(2n)$) нису обавезно симплектоморфизми за $n > 1$. На пример, ротација која пресликава (p_1, q_1)–раван у (p_1, p_2)–раван није симплектоморфизам, јер је рестрикција симплектичке форме на прву раван $dq_1 \wedge dp_1$, а на другу нула. Из (29) на стр. 140 следи да је

$$SO(2n) \cap Sp(2n) = U(n),$$

па ротација простора $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ која је симплектичка мора да буде линеарна над $\mathbb{C}$, другим речима, да комутира са множењем са $i = \sqrt{-1}$. Множење са i у $\mathbb{C}^n$ се, у координатама у $\mathbb{R}^{2n}$ задаје матрицом

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{Id}_n \\ \mathrm{Id}_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Из (29) на стр. 140 следи да скаларни производ у $\mathbb{R}^{2n}$ може да се изрази помоћу симплектичке форме и комплексне структуре као

$$\langle X, Y \rangle = \omega(JX, Y).$$

Одатле следи да је матрица S симплектичка ако и само ако је

$$S^\top J S = J \tag{32}$$

Из ове релације можемо да закључимо нешто више о спектру симплектичких матрица. Наиме, карактеристични полином симплектичке матрице може, помоћу једнакости $J^2 = -\mathrm{Id}$, $\det S = \det J = 1$ и (32), да се трансформише у

$$p(\lambda) = \det(S - \lambda \mathrm{Id}) = \det(-(S^\top)^{-1} + \lambda \mathrm{Id}) = \det(-\mathrm{Id} + \lambda S) = \lambda^{2n} p(1/\lambda).$$

Одатле следи да се сопствене вредности симплектичке матрице појављују у паровима, симетричним у односу на реалну праву и јединични круг комплексне равни (ако је λ сопствена вредност, онда су то и $\overline{\lambda}$, $1/\lambda$ и $1/\overline{\lambda}$). $\sharp$

Пример 17. Форма $d\theta \in \Omega^1(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ је затворена, па јединствено векторско поље X_θ дефинисано са

$$X_\theta \lrcorner \omega = d\theta$$

дефинише симплектоморфизам комплексне равни. У поларним координатама (r,θ) је

$$\omega = d(r\cos\theta) \wedge d(r\sin\theta) = r d\theta \wedge dr.$$

Одатле следи да је

$$X_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r},$$

па су добијени симплектоморфизми радијална пресликавања. Форма $d\theta$ није тачна, па ови симплектоморфизми нису Хамилтонови. $\sharp$

Задатак 13. Нека је M компактна симплектичка многострукост и нека је $H^1_{\mathrm{dR}}(M) = 0$. Доказати да је $\mathrm{Symp}_0(M) = \mathrm{Ham}(M)$. ✓

Задатак 14. Нека је M просто повезана симплектичка многострукост. Доказати да је $\mathrm{Symp}^c_0(M) = \mathrm{Ham}(M)$. ✓

У општем случају је $\mathrm{Symp}^c_0(M) \neq \mathrm{Ham}(M)$.

Пример 18. Цилиндар $T^*\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, као котангентно раслојење $\pi : T^*\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, има канонску симплектичку форму $\omega = -d\lambda$, где је λ Лиувилова форма.

Форма $d\theta \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$, где је θ поларна координата на кругу $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, дефинише на цилиндру затворену 1–форму $\pi^* d\theta$. Векторско поље X_θ, дефинисано са

$$X_\theta \lrcorner \omega = \pi^* d\theta$$

има интегралне криве које смо већ видели у Примеру 5 на стр. 130 – вертикалне транслације. Форма $d\theta$ је затворена, што је у складу са закључком изведеним раније, да су ове транслације симплектоморфизми. Специјално, дејство

$$(z,t) \mapsto (z, t + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

групе $(\mathbb{Z}, +)$ на цилиндру $T^*\mathbb{S}^1$ је симплектичко, па простор орбита, торус $T^*\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}$, наслеђује симплектичку структуру. Ова структура се подудара са стандардном симплектичком структуром на торусу, датом формом оријентације $d\theta_1 \wedge d\theta_2$ на $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Транслацијама генерисаним симплектичким векторским пољем X_θ одговарају ротације торуса. Ове ротације су симплектоморфизми, који нису Хамилтонови, јер је $d\theta$ затворена 1–форма која није тачна. $\sharp$

Задатак 15. Нека је φ_t Хамилтонов ток генерисан Хамилтонијаном H_t, за $t \in [0,1]$ и нека је

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

глатка функција, таква да је $f(0) = 0$. Доказати да је $\varphi_{f(t)}$ Хамилтонов ток генерисан Хамилтонијаном $f'(t)H_{f(t)}$. Како изгледа његово Хамилтоново векторско поље? Извести аналогну формулу за симплектичко векторско поље репараметризације пута у $\mathrm{Symp}_0(M)$. ✓

Задатак 16. Користећи Задатак 15 доказати да сваки Хамилтонов дифеоморфизам φ може да се споји са id_M Хамилтоновим током φ_t, таквим да је $\varphi_t \equiv \mathrm{id}_M$ за $t \in [0, \delta]$ и $\varphi_t \equiv \varphi$ за $t \in [1-\varepsilon, 1]$. ✓

Лема 10. *Нека је X_H Хамилтоново векторско поље генерисано Хамилтонијаном H_t и нека је $\psi \in \mathrm{Symp}(M)$ симплектоморфизам. Тада је $\psi_* X_H$ Хамилтоново векторско поље генерисано Хамилтонијаном $H_t \circ \psi^{-1}$.*

△ Нека је $X_{H\circ\psi^{-1}}$ Хамилтоново векторско поље генерисано Хамилтонијаном $H_t \circ \psi^{-1}$:

$$X_{H\circ\psi^{-1}} \lrcorner \omega = d(H \circ \psi^{-1}). \tag{33}$$

Пошто је $H \circ \psi^{-1} = (\psi^{-1})^* H$ и $d \circ (\psi^{-1})^* = (\psi^{-1})^* \circ d$, из (33) следи

$$X_{H\circ\psi^{-1}} \lrcorner \omega = (\psi^{-1})^* dH = (\psi^{-1})^* (X_H \lrcorner \omega) \tag{34}$$

(у последњем кораку смо искористили чињеницу да је X_H Хамилтоново векторско поље генерисано Хамилтонијаном H). Пошто је ψ^{-1} симплектоморфизам, важи

$$(\psi^{-1})^*(X_H \lrcorner \omega)(Y) = \omega(X_H, \psi_*^{-1} Y) = \omega(\psi_* X_H, Y) = \psi_* X_H \lrcorner \omega(Y). \tag{35}$$

Из (34) и (35) следи

$$X_{H\circ\psi^{-1}} \lrcorner \omega = \psi_* X_H \lrcorner \omega,$$

па је, због недегенерисаности симплектичке форме, $X_{H\circ\psi^{-1}} = \psi_* X_H$. ▽

Тврђење 6. *Нека су φ_t^H и φ_t^K Хамилтонови токови дефинисани Хамилтонијанима H и K и нека је $\psi \in \mathrm{Symp}(M)$ симплектоморфизам. Тада важи следеће:*

(1) *$\varphi_t^H \circ \varphi_t^K$ је Хамилтонов ток генерисан Хамилтонијаном*

$$(H \sharp K)_t(x) := H_t(x) + K_t((\varphi_t^H)^{-1})(x));$$

(2) *$(\varphi_t^H)^{-1}$ је Хамилтонов ток генерисан Хамилтонијаном*

$$\overline{H}_t(x) := -H_t(\varphi_t^H(x));$$

(3) *$\psi \circ \varphi_t^H \circ \psi^{-1}$ је Хамилтонов ток генерисан Хамилтонијаном*

$$H_t^{\psi}(x) := H_t(\psi^{-1}(x)).$$

△ Применом правила за извод композиције и

$$\frac{d\varphi_t^H}{dt} = X_H \circ \varphi_t^H \qquad \text{и} \qquad \frac{d\varphi_t^K}{dt} = X_K \circ \varphi_t^K$$

добијамо

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^H \circ \varphi_t^K) = X_H \circ (\varphi_t^H \circ \varphi_t^K) + (\varphi_t^H)_* X_K \circ \varphi_t^K.$$

Из Леме 10 следи да је други сабирак на десној страни Хамилтоново векторско поље генерисано Хамилтонијаном $K_t((\varphi_t^H)^{-1})(x))$, чиме је доказано прво тврђење. Из њега следи друго, диференцирањем израза $\varphi_t^H \circ (\varphi_t^H)^{-1} = \mathrm{id}_M$. Треће тврђење је еквивалентно Леми 10. ▽

Последица 3. *Скуп $\mathrm{Ham}(M)$ је нормална подгрупа групе $\mathrm{Symp}_0(M)$.*

Нека је $I \subset \mathbb{R}$ интервал и

$$I \to \mathrm{Ham}(M), \qquad t \mapsto \varphi_t$$

глатки пут у $\mathrm{Ham}(M)$, у смислу да је пресликавање

$$I \times M \to M, \qquad (t, x) \mapsto \varphi_t(x)$$

глатко. Тада, по Дефиницији 17, свако φ_{t_0} може да се споји са id глатким путем φ_{s,t_0} ($\varphi_{0,t_0} = \mathrm{id}$, $\varphi_{1,t_0} = \varphi_{t_0}$) чије је векторско поље $X_s^{t_0}$ такво да је $X_s^{t_0} \lrcorner \omega$ тачна форма. Следећа теорема, коју ћемо да докажемо нешто касније (као Последицу 8 на стр. 169), показује да и сам пут φ_t има исто својство.

Теорема 5. **[13]** *Нека је φ_t глатки пут у $\mathrm{Ham}(M)$ и нека је*

$$\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = X_t(\varphi_t(x)).$$

Тада постоји глатка функција

$$G : I \times M \to \mathbb{R}, \qquad (t, x) \mapsto G_t(x)$$

са компактним носачем, таква да је $X_t \lrcorner \omega = dG_t$.

Следеће тврђење показује да су векторски простори аутономних симплектичких и Хамилтонових векторских поља затворени за комутаторе.

Тврђење 7. *Нека су X, Y два аутономна (тј. независна од t) симплектичка векторска поља на симплектичкој многострукости (M, ω). Тада је њихов комутатор $[X, Y]$ Хамилтоново векторско поље, генерисано Хамилтонијаном*

$$H : M \to \mathbb{R}, \qquad H(p) = \omega(Y_p, X_p).$$

$\triangle$ Из дефиниције функције H и Картанове формуле следи

$$dH = d(X \lrcorner (Y \lrcorner \omega)) = L_X(Y \lrcorner \omega) - X \lrcorner d(Y \lrcorner \omega) = L_X(Y \lrcorner \omega), \tag{36}$$

при чему последња једнакост следи из чињенице да је Y симплектичко векторско поље. Из својства унутрашњег диференцирања[7] $i_{[X,Y]} = L_X i_Y - i_Y L_X$ и чињенице да је $L_X \omega = 0$, пошто је векторско поље X симплектичко, следи да је последњи израз у (36) једнак $[X, Y] \lrcorner \omega$, чиме је тврђење доказано. $\bigtriangledown$

Последица 4. *Ако су $H, K : M \to \mathbb{R}$ глатке функције на симплектичкој многострукости M и X_H, Y_H њихова Хамилтонова векторска поља, онда је $[X_H, X_K] = X_{\{H,K\}}$, где је*

$$H, K : M \to \mathbb{R}$$

глатка функција дефинисана са $\{H, K\}(p) = \omega(X_H(p), X_K(p))$.

Дефиниција 18. Операција $(H, K) \mapsto \{H, K\}$ назива се *Пуасоновом заградом.* $\Diamond$

---

[7]Лако је видети да је унутрашње диференцирање $i_X \eta = X \lrcorner \eta$ једнозначно одређено следећим својствима: $i_X f = 0$ за 0–форму f, $i_X \eta = \eta(X)$ за 1–форму η, Лајбницовим правилом у односу на множење $\wedge$ и комутирањем са рестрикцијама на координатне карте. Одатле следи и једнакост $i_{[X,Y]} = L_X i_Y - i_Y L_X$, пошто обе стране задовољавају четири наведена својства.

Напомена 10. Ми смо, у овом тексту, дефинисали Хамилтонова векторска поља захтевајући компактност носача, да бисмо могли да говоримо о њима придруженом Хамилтоновом току. Међутим, дефиниција векторског поља X_H условом

$$X_H \lrcorner \omega = dH$$

има смисла за сваку глатку функцију $H \in C^\infty(M)$, без обзира на то да ли је њен носач компактан. Одатле следи да су Пуасонове заграде дефинисане на целом скупу $C^\infty(M)$, а не само на његовом подскупу $C_c^\infty(M)$. $\diamond$

Приметимо да из дефиниције Хамилтоновог векторског поља следи да је

$$\{H, K\} = dH(X_K),$$

па Пуасонове заграде задовољавају *Лајбницово правило*

$$\{H, GK\} = \{H, G\}K + \{H, K\}G. \tag{37}$$

Тврђење 8. *Пуасонове заграде имају следећа својства:*

(1) $\{H, K\} = -\{K, H\}$;
(2) $\{\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2, K\} = \lambda_1\{H_1, K\} + \lambda_2\{H_2, K\}$;
(3) $\{H_1, \{H_2, H_3\}\} + \{H_3, \{H_1, H_2\}\} + \{H_2, \{H_3, H_1\}\} = 0$.

$\triangle$ Доказ је последица директног рачуна. $\triangledown$

Задатак 17. Нека су (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2) симплектичке многострукости и $\psi : M_1 \to M_2$ дифеоморфизам. Доказати да је ψ симплектоморфизам ако и само ако чува Пуасонову заграду, тј. да је $\psi^*\omega_2 = \omega_1$ ако и само ако је

$$\{H, K\} \circ \psi = \{H \circ \psi, K \circ \psi\}$$

за све $H, K \in C^\infty(M_2)$ (видети Задатак 11 на стр. 145). $\checkmark$

Задатак 18. Нека су $H, K : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ две глатке функције на симплектичкој многострукости $\mathbb{R}^{2n} \cong T^*\mathbb{R}^n$. Доказати да је

$$\{H, K\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial K}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial K}{\partial q_j} \right)$$

у канонским координатама $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ у којима симплектичка форма има запис $\omega = dq_1 \wedge dp_1 + \ldots + dq_n \wedge dp_n$ и да је

$$\dot{q} = \{q, H\}, \qquad \dot{p} = \{p, H\} \tag{38}$$

запис Хамилтонових једначина (8). $\checkmark$

Задатак 19. Нека је $(q(t), p(t))$ трајекторија Хамилтоновог система у $\mathbb{R}^{2n}$ дефинисаног Хамилтонијаном H. Доказати следеће уопштење Хамилтонових једначина (38):

$$\frac{d}{dt} f(q, p, t) = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

за сваку глатку функцију $f : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\checkmark$

Задатак 20. Нека је M симплектичка многострукост и $H : M \to \mathbb{R}$ аутономни Хамилтонијан. Доказати да је глатка функција $K : M \to \mathbb{R}$ константна дуж Хамилтонових трајекторија дефинисаних Хамилтонијаном H ако и само ако је

$$\{H, K\} = 0. \tag{39}$$

Специјално, из Тврђења 8 следи $\{H,H\} = -\{H,H\}$, тј. $\{H,H\} = 0$, па овај задатак уопштава Закон очувања енергије (Тврђење 5). ✓

Дефиниција 19. Глатке функције H и K су *у инволуцији* ако задовољавају (39). Функција F се назива *првим интегралом* Хамилтоновог система дефинисаног аутономним Хамилтонијаном H ако су функције F и H у инволуцији. Специјално, сам Хамилтонијан H је први интеграл. ◊

Присуство довољног броја независних[8] интеграла у инволуцији нам омогућава да експлицитно решимо Хамилтонов систем. Прецизније, важи следећа теорема:

Теорема 6. (Арнолд–Лиувил) *Нека је на симплектичкој многострукости M димензије $2n$ дат Хамилтонијан H и његових n првих интеграла*

$$F_1 \equiv H, F_2, \ldots, F_n \in C^\infty(M)$$

у инволуцији. Ако су функције $F_1, \ldots, F_n$ независне на M, онда је за сваку регуларну вредност $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ пресликавања

$$F := (F_1, \ldots, F_n) : M \to \mathbb{R}^n$$

скуп

$$M_c := F^{-1}(c) = \{x \in M \mid F_1(x) = c_1, \ldots, F_n(x) = c_n\}$$

глатка подмногострукост у M, инваријантна у односу на Хамилтонове токове генерисане сваким од Хамилтонијана F_j. Ако је многострукост M_c компактна и повезана, она је дифеоморфна n–димензионом торусу:

$$M_c \cong (\mathbb{S}^1)^n,$$

са координатама $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ у којима Хамилтонове једначине са Хамилтонијаном H имају облик

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \eta_j$$

тако да је њихово решење $\theta_j(t) = \theta_j(0) + \eta_j t$.

△ Доказ ове теореме ћемо да дамо касније у тексту (видети Пример 27 на стр. 170, Напомену 24 на стр. 174 и Задатак 39 на стр. 175). ▽

Дефиниција 20. Хамилтонов систем на симплектичкој многострукости димензије $2n$ је *интеграбилан* ако има n независних интеграла у инволуцији. ◊

Задатак 21. Доказати да је сваки Хамилтонов систем на оријентисаној површи (дводимензионој симплектичкој многострукости) интеграбилан. ✓

Задатак 22. **(Кеплеров проблем)** Класични проблем два тела, или Кеплеров проблем, је Хамилтонов систем у $T^*\mathbb{R}^3$ задат Хамилтонијаном[9]

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2 + V(\|\mathbf{q}\|) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(q_1, q_2, q_3). \tag{40}$$

---

[8] Сетимо се да су функције $F_1, \ldots, F_n$ независне на M ако су њихови диференцијали $dF_1(x), \ldots, dF_n(x)$ линеарно независни вектори простора T_x^*M за све $x \in M$.

[9] Функција V (потенцијална енергија планете која се креће око Сунца у координатном почетку) која зависи само од $q = \|\mathbf{q}\|$ се појављује у опису кретања у тзв. *централном пољу*, тј. пољу силе $\mathbf{F}(\mathbf{q}) = f(q)\mathbf{q}$, за неку скаларну функцију f која зависи само од $q = \mathbf{q}$. Другим речима, централно поље је векторско поље које је инваријантно у односу на групу изометријских трансформација које фиксирају координатни почетак (центар поља). У случају Кеплеровог проблема је $f(r) = -kr^{-2}$ (сила гравитације), тј. $V(r) = -kr^{-1}$.

Нека су J_1, J_2, J_3 компоненте *угаоног момента*, тј. векторског поља

$$\mathbf{J} := \mathbf{q} \times \mathbf{p}.$$

(а) Доказати да су функције H, J_3 и $\|\mathbf{J}\|^2$ први интеграли овог система који су у иволуцији и закључити да је он интеграбилан.

(б) Доказати да су функције J_1, J_2, J_3 први интеграли овог система, али да они нису у инволуцији. Закључити да се кретање одвија у једној равни (Закон очувања угаоног момента у централном пољу).

(в) Нека је $\mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$ покретни поларни систем у коме се одвија кретање. И нека је $\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_r(t)$ трајекторија по којој се одвија кретање (са r означавамо дужину вектора $\mathbf{r}$, тј. $r = \|\mathbf{r}\|$). Користећи Лежандрову трансформацију и елементарно диференцирање, доказати да је

$$\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

и, одатле, да је $\mathbf{J} = r^2\dot{\theta}(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta)$. Закључити из (б) да је величина $r^2\dot{\theta}$ константна и одатле извести *Други Кеплеров закон*: Вектор положаја планете која се креће око Сунца у координатном почетку захвата једнаке површине у једнаким временима.

(г) Доказати да је Хамилтонијан у координатама из (в) дат са

$$H = \frac{1}{2}(p_r^2 + r^{-2}p_\theta^2) + V(r),$$

где је $p_r := \dot{r}$, $p_\theta := r^2\dot{\theta}$. Користећи Закон очувања угаоног момента $J = r^2\dot{\theta}$, доказати да је

$$H = \frac{1}{2}p_r^2 + U(r), \qquad \text{где је} \qquad U(r) = V(r) + \frac{J^2}{2r^2}. \tag{41}$$

Приметимо да тиме тродимензиони Хамилтонов систем (40) сведен на једнодимензиони систем (41) истог типа.

(д) Из Закона очувања енергије (Тврђење 5 на стр. 145) и (г) извести закључак да је

$$p = \sqrt{2(E - U(r))}$$

где је E укупна енергија, а одатле и из $p = \dot{r}$

$$dt = \sqrt{2(E - U(r))}\, dr.$$

(ђ) Користећи (д) и Закон очувања угаоног момента $\dot{\theta} = r^{-2}J$ доказати да је

$$d\theta = \frac{r^{-2}J}{\sqrt{2(E - U(r)}}\, dr,$$

тако да проблем кретања у централном пољу има експлицитно решење

$$\theta = \int \frac{r^{-2}J}{\sqrt{2(E - U(r)}}\, dr.$$

Специјално доказати да су у гравитационом пољу

$$V(r) = -kr^{-1}, \qquad \text{тј.} \qquad U(r) = -kr^{-1} + \frac{J^2}{2r^2}$$

трајекторије овог система елипсе

$$r = \frac{a}{1 + e\cos\theta}, \qquad \text{где је} \qquad a = \frac{J^2}{k},\ e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{k^2}}.$$

Ово је Први Кеплеров закон. ✓

Напомена 11. Нека је r_0 почетно растојање планете од Сунца, а $v_0 := \|\dot{\mathbf{r}}(0)\|$ њена почетна (скаларна) брзина. Почетни тренутак $t = 0$ можемо да изаберемо тако да у њему планета буде најближа Сунцу, тако да је $\dot{r}(0) = 0$, као извод функције у тачки минимума. Тада из Закона очувања угаоног момента у централном пољу следи да је $r^2\dot{\theta} = r_0 v_0$. Ако је T период револуције, а a и b дужине велике и мале полуосе елипсе по којој се планета креће, из формуле за површину елипсе $P = ab\pi$ добијамо, израза $\frac{1}{2}r^2\,d\theta$, да је површина елипсе $P = \frac{1}{2}r_0 v_0 T$, где је T период револуције. У Задатку 22 смо нашли експлицитну једначину трајекторије. Из ње можемо да израчунамо и дужине њених полуоса и тако докажемо *Трећи Кеплеров закон*: однос $\frac{T^2}{a^3}$ квадрата периода револуције и куба велике полуосе је исти за сваку планету Сунчевог система. ◇

Дефиниција 21. Скуп (аутономних) симплектичких векторских поља на многострукусти (M,ω) означаваћемо са $\mathrm{symp}(M,\omega)$ или $\mathrm{symp}(M)$, а скуп (аутономних) Хамилтонових векторских поља са $\mathrm{ham}(M,\omega)$ или $\mathrm{ham}(M)$. ◇

Из Тврђења 7 следи да су $\mathrm{symp}(M)$ и $\mathrm{ham}(M)$ Лијеве алгебре, тј. подалгебре Лијеве алгебре $\mathcal{X}(M)$ свих векторских поља на M. Оне могу да се схвате и као Лијеве алгебре Лијевих група $\mathrm{Symp}^c(M)$ и $\mathrm{Ham}(M)$. Ове Лијеве алгебре су бесконачно димензиони векторски простори, па су и њихове Лијеве групе бесконачно димензионе, тј. многострукости моделоване над бесконачно димензионим тополошким векторским просторима. Нећемо дубље улазити у дефиницију глатке структуре на групама $\mathrm{Symp}^c(M)$ и $\mathrm{Ham}(M)$, али је корисно имати на уму да се ради о бесконачно димензионим Лијевим групама. Тангентни вектор $X \in T_\varphi \mathrm{Symp}^c(M)$ је објекат који се, по аналогији са коначно димензионим случајем, добија диференцирањем по t у $t = 0$ пута φ_t кроз тачку $\varphi_0 = \varphi$. На тај начин, за свако $x \in M$ добијамо вектор $\frac{d}{dt}\varphi_t(x)\big|_{t=0}$. Другим речима, тангентни *вектори* у $\mathrm{Symp}^c(M)$ су тангентна векторска *поља* на M, која су уз то још и симплектичка. Слично важи и за $\mathrm{Ham}(M)$ и Хамилтонова векторска поља.

Из Тврђења 8 и Последице 4 следи

Последица 5. *Ако је M симплектичка многострукост, $(C_c^\infty(M)\{\cdot,\cdot\})$ је Лијева алгебра, а пресликавање*

$$C_c^\infty(M) \to \mathrm{ham}(M), \qquad H \mapsto X_H$$

је хомоморфизам Лијевих алгебри.

Задатак 23. Нека је M компактна симплектичка многострукост. Доказати да су низови

$$\begin{array}{c} 0 \\ \downarrow \\ 0 \to \mathbb{R} \to C_c^\infty(M) \to \quad \mathrm{ham}(M) \quad \to 0 \\ \downarrow \\ \mathrm{symp}(M) \\ \downarrow \\ H^1_{\mathrm{dR}}(M) \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$$

тачни. ✓

Пример 19. (Хамилтонова дејства и моментна пресликавања) Нека је G Лијева група и нека је $\mathfrak{g}$ њена Лијева алгебра. За свако $\eta \in \mathfrak{g}$ са

$$G \ni g \mapsto \eta_g := (L_g)_* \eta \in T_g G$$

(где је $L_g : G \to G$, $L_g(x) = gx$, лева транслација) је дефинисано левоинваријантно векторско поље, такво да је $\eta_e = \eta$. Означимо ово векторско поље истим словом η. Из јединствености решења $\gamma_\eta :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G$ диференцијалне једначине

$$\frac{d\gamma_\eta}{dt}(t) = \eta(\gamma_\eta(t)), \qquad \gamma_\eta(0) = e \tag{42}$$

следи да је $\gamma_\eta(s+t) = \gamma_\eta(s) \cdot \gamma_\eta(t)$, за све $s, t \in]-\varepsilon/2, \varepsilon/2[$. Одатле следи да је крива γ_η дефинисана за све $t \in \mathbb{R}$ и да задовољава једначину (42) на целој реалној правој. Другим речима, свако $\eta \in \mathfrak{g}$ дефинише једнопараметарску подгрупу $(\gamma_\eta(\mathbb{R}), +)$ Лијеве групе $(G, \cdot)$. Крива γ_η може да се опише и на други начин, као *јединствени* хомоморфизам Лијевих група

$$\gamma_\eta : (\mathbb{R}, +) \to (G, \cdot)$$

за који је $\frac{d\gamma_\eta}{dt}(0) = \eta$. *Експоненцијално пресликавање* на Лијевој алгебри $\mathfrak{g}$ је пресликавање

$$\exp : \mathfrak{g} \to G, \qquad \exp(\eta) = \gamma_\eta(1). \tag{43}$$

Нека је

$$G \to \mathrm{Symp}(M, \omega)$$

симплектичко дејство Лијеве групе G на симплектичкој многострукости (M, ω). Сваки елемент $\eta \in \mathfrak{g}$ дефинише векторско поље

$$M \ni x \mapsto X_\eta(x) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\eta) \cdot x \in T_x M.$$

Пошто је дејство симплектичко, форма $X_\eta \lrcorner \omega$ је затворена за све $\eta \in \mathfrak{g}$. Дејство је *слабо Хамилтоново* ако је за свако $\eta \in \mathfrak{g}$

$$X_\eta \lrcorner \omega = dH_\eta$$

за неку глатку функцију $H_\eta : M \to \mathbb{R}$. Функција H_η је дефинисана до на адитивну константу; природно је изабрати ту константу тако да пресликавање

$$\mathfrak{g} \to C^\infty(M), \qquad \eta \mapsto H_\eta \tag{44}$$

буде линеарно. Ако је при томе (44) морфизам Лијевих алгебри $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ и $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$, онда кажемо да је дејство групе G *јако Хамилтоново.*

Пресликавање

$$\mu : M \to \mathfrak{g}^*, \qquad \langle \mu(x), \eta \rangle = H_\eta(x)$$

назива се *моментним пресликавањем* Хамилтоновог дејства.

Специјално, ако је $G = U(1)$ група јединичних комплексних бројева, са Лијевом алгебром $\mathfrak{u}(1) \cong \mathbb{R} \cong \mathfrak{u}(1)^*$, моментно пресликавање је сам Хамилтонијан дејства $\mathbb{S}^1 \times M \to M$.

Група $G = SO(3)$ ротација простора $\mathbb{R}^3$ дефинише Хамилтоново дејство на симплектичкој многострукости $T^*\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6$:

$$SO(3) \times (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3), \qquad (A, (\mathbf{q}, \mathbf{p})) \mapsto (A \cdot \mathbf{q}, A \cdot \mathbf{p}).$$

Три компоненте моментног пресликавања овог дејства

$$\mu : T^*\mathbb{R}^3 \to \mathfrak{so}(3)^* \cong \mathbb{R}^3$$

називају се *угаоним моментима.* Компоненте моментног пресликавања дејства групе транслација $(\mathbb{R}^3, +)$ на $(\mathbb{R}^3)$, које на сличан начин индукује симплектичко дејство на $T^*\mathbb{R}^3$, називају се *линеарним моментима.* $\sharp$

Напомена 12. Ако је на Лијевој групи G задата биинваријантна (псеудо) Риманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$, тј. таква да је

$$L_g^*\langle\cdot,\cdot\rangle = R_g^*\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle$$

онда је дефиниција (43) експоненцијалног пресликавања еквивалентна дефиницији експоненцијалног пресликавања на Римановој многострукости коју смо дали у Глави 1. Интеграцијом по Харовој мери може да се докаже да свака компактна Лијева група има биинваријантну (псеудо) Риманову метрику: произвољну метрику на T_eG можемо да проширимо до левоинваријантне метрике $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на TG, помоћу левих транслација. На сличан начин можемо да дефинишемо левоинваријантну форму запремине Ω. Тада је са

$$(X_g, Y_g) \mapsto \int_G \langle (R_h)_*(g)X_g, (R_h)_*(g)Y_g\rangle\,\Omega(h)$$

дефинисана биинваријантна метрика на G. $\diamond$

Задатак 24. Нека Лијева група G глатко дејствује на многострукости N и нека је, за фиксирано $g \in G$,

$$D_xg : T_xN \to T_{gx}N$$

извод пресликавања $x \mapsto gx$. Доказати да је са

$$G \times T^*N \to T^*N, \qquad (g, \alpha) \mapsto (D_xg^{-1})^*\alpha, \tag{45}$$

за $\alpha \in T_x^*N$, дефинисано Хамилтоново дејство групе G на T^*N, са Хамилтонијаном

$$H_\eta : T^*M \to \mathbb{R}, \qquad H_\eta(\alpha) = -\alpha(X_\eta)$$

где је, за $\eta \in \mathfrak{g}$, X_η векторско поље на N дефинисано дејством G на N као у Примеру 19. Упутство: доказати прво да је Лиувилова форма на T^*N инваријантна у односу на дејство (45), па је њен Лијев извод у правцу векторског поља $\widetilde{X}_\eta$ на T^*N дефинисаног дејством (45) као у Примеру 19 једнак нули. Применити затим Картанову формулу $L_{\widetilde{X}_\eta}\lambda = d(\widetilde{X}_\eta\lrcorner\lambda) + \widetilde{X}_\eta\lrcorner d\lambda$ и карактеризацију Лиувилове форме дату у Леми 2 на стр. 127. ✓

Задатак 25. Нека је $\mathcal{O}(\xi)$ симплектичка многострукост (орбита коадјунгованог дејства Лијеве групе G) дефинисана у Примеру 13. Доказати да је дејство групе G на $\mathcal{O}(\xi)$, дефинисано са

$$(g, \varsigma) \mapsto \mathrm{Ad}(g^{-1})^*\varsigma$$

Хамилтоново, са Хамилтонијаном $H_\eta(\varsigma) = -\mathrm{ad}(\eta)^*\varsigma$ и да је моментно пресликавање

$$\mu : \mathcal{O}(\xi) \to \mathfrak{g}^*$$

инклузија $\mu(\varsigma) = \varsigma$. ✓

Особине Пуасонових заграда из Тврђења 8 и Лајбницово правило (37) мотивишу нас да дамо следећу дефиницију.

Дефиниција 22. *Пуасонова многострукост* је пар $(M, \{\cdot,\cdot\})$, где је M глатка многострукост, а $\{\cdot,\cdot\}$ Лијева заграда на C^∞ која задовољава Лајбницово правило (37). Пуасонове заграде називају се још и *Пуасоновом структуром* на Пуасоновој многострукости. Пресликавање $f : N \to M$ Пуасонових многострукости $(N, \{\cdot,\cdot\}_N)$ и $(M, \{\cdot,\cdot\}_M)$ се назива *Пуасоновим пресликавањем* ако је

$$\{H, K\}_M \circ f = \{H \circ f, K \circ f\}_N$$

за све $H, K \in C^\infty(M)$. $\diamondsuit$

Пример 20. Свака глатка многострукост M допушта Пуасонову структуру: тривијална Пуасонова заграда $\{\cdot,\cdot\} \equiv 0$ дефинише Лијеву заграду на $C^\infty(M)$ која задовољава Лајбницово правило. $\sharp$

Пример 21. Нека је $V \subset \mathbb{R}^3$ отворен подскуп. Тада је, за $H, K \in C^\infty(V)$, мешовитим производом

$$\{H, K\}(x) = \langle x, \nabla H \times \nabla K\rangle$$

дефинисана Пуасонова структура на V. $\sharp$

Пример 22. Из Напомене 10 следи да свака симплектичка многострукост има природну Пуасонову структуру $\{H, K\} = \omega(X_H, X_K)$. $\sharp$

Дефиниција 23. Нека је $(M, \{\cdot,\cdot\})$ Пуасонова многострукост. *Хамилтоново векторско поље* генерисано функцијом $H \in C^\infty(M)$ је векторско поље X_H дефинисано са

$$dK(X_H) = \{H, K\}$$

за све $K \in C^\infty(M)$. $\diamondsuit$

Приметимо да из билинеарности и Лајбницовог правила следи да је Хамилтоново векторско поље добро дефинисано (видети Дефиницију 2 на стр. 5).

Задатак 26. Доказати да је пресликавање $H \mapsto X_H$ хомоморфизам Лијевих алгебри $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$ и $(\mathcal{X}(M), [\cdot,\cdot])$. ✓

Дефиниција 24. Функције које припадају језгру $\ker(H \mapsto X_H)$ хомоморфизма из Задатка 26 називају се *Казимировим функцијама*. $\diamondsuit$

Задатак 27. Описати Казимирове функције на симплектичким многострукостима и на Пуасоновим многострукостима из Примера 20 и 21. ✓

2.3. Дарбуова теорема. Као што смо рекли, симплектичке многострукости немају локалне инваријанте – све су локално изоморфне:

Теорема 7. (Дарбу) *Свака тачка $p \in M$ симплектичке многострукости (M, ω) има координатну околину (U, ϕ), такву да је*

$$\omega\big|_U = \phi^*(dq_1 \wedge dp_1 + \ldots + dq_n \wedge dp_n),$$

где је $n = \frac{1}{2}\dim M$.

$\triangle$ Нека је (V, ψ) произвољна координатна околина тачке p и нека је $\omega_1 = (\psi^{-1})^*\omega\big|_V$. Не умањујући општост (односно, компонујући ψ са линеарном трансформацијом) можемо да претпоставимо да је $\psi(p) = 0$ и да је запис форме ω_1 у нули

$$\omega_1(0) = dq_1 \wedge dp_1 + \ldots + dq_n \wedge dp_n$$

(свођење симплектичке форме на овај облик је ствар Линеарне алгебре).

Форме ω_1 и ω_0 су симплектичке форме у некој околини W нуле у $\mathbb{R}^{2n}$. Довољно је да докажемо да постоји дифеоморфизам φ неке околине нуле, такав да је $\varphi^*\omega_1 = \omega_0 := dq_1 \wedge dp_1 + \ldots + dq_n \wedge dp_n$. Посматрајмо дуж

$$\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1, \qquad 0 \le t \le 1$$

у $\Omega^2(W)$, са крајевима ω_0 и ω_1. Приметимо да су све форме ω_t затворене:

$$d\omega_t = (1-t)d\omega_0 + td\omega_1 = 0 \qquad \text{за све} \qquad t \in [0,1].$$

Доказаћемо да постоји фамилија дифеоморфизама φ_t дефинисаних у некој околини нуле у $\mathbb{R}^{2n}$, таква да је

$$\varphi_t^*\omega_t = \omega_0 \qquad \text{за све} \quad t \in [0,1]. \tag{46}$$

Фамилију φ_t ћемо да дефинишемо помоћу векторског поља X_t које је генерише, тј. као решење диференцијалне једначине

$$\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = X_t(\varphi_t(x)), \qquad \varphi_t(x) = x, \tag{47}$$

где ћемо векторско поље да изаберемо тако да буде обезбеђено (46). Другим речима, решавање нелинеарног проблема (46) сводимо на једноставнији, линеарни, тако што диференцирамо (46) по t и решавамо добијену (уз помоћ Картанове формуле) једначину

$$d(X_t \lrcorner \omega_t) + X_t \lrcorner d\omega_t + \frac{\partial \omega_t}{\partial_t} = 0,$$

односно

$$d(X_t \lrcorner \omega_t) + \omega_1 - \omega_0 = 0. \tag{48}$$

по X_t. Ако је X_t решење ове једначине, егзистенција траженог дифеоморфизма φ_t следи из примене теореме о егзистенцији решења диференцијалних једначина на (47).

Дакле, остаје само да покажемо да линеарна једначина (48) има решење.

Пошто је $\omega_0 = \omega_1$ у нули, следи да је $\omega_t(0) \equiv \omega_0$ за све t. Из недегенерисаности форме ω_0 и чињенице да је недегенерисаност отворено својство следи да су у некој отвореној лопти $B \subset W$ нуле све форме ω_t недегенерисане. Форме ω_0 и ω_1 су симплектичке, па је форма $\omega_0 - \omega_1$ затворена. Из Поенкареове леме (тј. кохомолошке тривијалности лопте) следи да рестрикција форме $\omega_0 - \omega_1$ на B тачна, тј. да на B важи $\omega_0 - \omega_1 = d\varsigma$ за неку 1–форму ς. Тада се једначина (48) своди на једначину

$$X_t \lrcorner \omega_t = \varsigma,$$

која има решење због недегенерисаности ω_t. $\bigtriangledown$

Напомена 13. Дарбуова теорема не важи без услова $d\omega = 0$: форма која није затворена не може да буде локално дифеоморфна затвореној форми. Недегенерисана, не обавезно затворена, 2–форма назива се *скоро симплектичком* формом; *скоро симплектичка многострукост* је многострукост са скоро симплектичком формом. Скоро симплектичке многострукости могу локално да се разликују, као и Риманове. Скоро симплектичка форма ω је симплектичка ако задовољава диференцијалну једначину $d\omega = 0$. Аналогна диференцијална једначина за Риманову метрику била би $R = 0$, где је R кривина. Из Теореме 14 на стр. 108 следи да су такве многострукости локално еуклидске. Приметимо да је свака површ са скоро симплектичком формом, тј. свака дводимензиона скоро симплектичка многострукост, обавезно симплектичка, док локална Риманова геометрија површи може да буде нетривијална. ◇

Напомена 14. Доказ Теореме 7 који смо навели дао је Ј. Мозер у [**45**]. Изложени метод решавања нелинеарних једначина, помоћу конструкције фамилије једначина параметризоване реалним параметром (тј. хомотопске деформације полазне једначине) и свођења нелинеарног проблема на линеарни и на диференцијалну једначину назива се *Мозеровим методом деформације*. Мозер је у [**45**] доказао нешто другачију верзију Теореме 7. Предлажемо читаоцу да доказ тог тврђења, које формулишемо као Теорему 8, изведе сам по угледу на доказ Теореме 7. ◇

Теорема 8. *Нека M затворена (компактна без границе) многострукост и нека је ω_t глатка фамилија симплектичких форми на M, таква да је*

$$[\omega_t] = c \in H^2_{\mathrm{dR}}(M),$$

тј. таква да цео пут $\omega_t \in \Omega^2(M)$ припада једној кохомолошкој класи. Тада су све многострукости (M, ω_t) симплектоморфне; тачније, постоји глатка фамилија дифеоморфизама $\varphi_t : M \to M$ таква да је $\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$.

Напомена 15. У [**41**] је дат пример фамилије симплектичких форми ω_t на компактној шестодимензионој многострукости M, такве да је

$$[\omega_0] = [\omega_1] \in H^2_{\mathrm{dR}}(M),$$

за које не постоји дифеоморфизам $\varphi : M \to M$ такав да је $\varphi^* \omega_1 = \omega_0$. То показује да у Теореми 8 услов да фамилија симплектичких форми не напушта фиксирану кохомолошку класу не може, у општем случају, да се изостави. Изузетак су дводимензионе симплектичке многострукости, тј. оријентабилне површи. То показује следећи, нешто општије формулисан, задатак, чије је тврђење такође садржано у [**45**], као још једна илустрација Мозеровог метода деформације. ◇

Задатак 28. Нека је M затворена оријентабилна многострукост димензије n и нека су $\Omega_0, \Omega_1 \in \Omega^n(M)$ две форме запремине на њој. Доказати да је

$$\int_M \Omega_0 = \int_M \Omega_1$$

ако и само ако постоји дифеоморфизам $f : M \to M$ такав да је $f^* \Omega_1 = \Omega_0$. Специјално, ако је Σ компактна површ без границе и ω_0, ω_1 две симплектичке форме на њој, онда су многострукости (Σ, ω_0) и (Σ, ω_1) симплектоморфне ако и само ако је површина површи Σ, мерена формом ω_0, једнака површини мереној формом ω_1. ✓

Дарбуова теорема има следеће уопштење, које се некад назива *релативном Дарбуовом теоремом*.

Теорема 9. *Нека је M многострукост димензије $2n$ и $N \subset M$ компактна подмногострукост. Нека су $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^2(M)$ две симплектичке форме на M, такве да је*

$$\omega_0\big|_{T_qM} = \omega_1\big|_{T_qM} \qquad \textit{за све} \qquad q \in N.$$

Тада постоје отворене околине V_0 и V_1 скупа N и дифеоморфизам $\phi : V_0 \to V_1$, такав да је

$$\phi\big|_N = \mathrm{id}_N \qquad \textit{и} \qquad \phi^*\omega_1 = \omega_0.$$

Доказ Теореме 9 је скоро исти као доказ Теореме 7. Једина разлика се састоји у томе што уместо Поенкареове леме треба применити њену релативну верзију, коју издвајамо као следеће тврђење.

Лема 11. **(Релативна Поенкареова лема)** *Нека је M глатка многострукост, N њена глатка подмногострукост и $\beta \in \Omega^k(M)$ затворена k–форма, таква да је $\beta(TN) = \{0\}$. Тада постоји околина $V \supset N$ и диференцијална форма $\sigma \in \Omega^{k-1}(V)$ таква да је*

$$\beta\big|_V = d\sigma \qquad \textit{и} \qquad \sigma(T_NM) = \{0\}.$$

$\triangle$ Нека је V цеваста околина подмногострукости N. Тада је пројекција $\pi : V \cong \nu N \to N$ хомотопна идентичком пресликавању $\mathrm{id}_V : V \to V$; хомотопију остварује хомотетија $\xi \mapsto t \cdot \xi$ на слојевима нормалног раслојења. Означимо ту хомотопију са h_t ($h_1 = \mathrm{id}_V$, $h_0 = \pi$). Из $\beta(T_NM) = \{0\}$ следи $h_0^*\beta = \pi^*\beta = 0$, па из Картанове формуле и услова $d\beta = 0$ добијамо

$$\beta = h_1^*\beta - h_0^*\beta = \int_0^1 \frac{d}{dt} h_t^*\beta \, dt = \int_0^1 h_t^* d(\dot{h}_t \lrcorner \beta) \, dt.$$

Одатле следи да је $\sigma = \int_0^1 h_t^*(\dot{h}_t \lrcorner \beta) \, dt$ тражена форма. $\triangledown$

Задатак 29. Извести доказ Теореме 9 следећи кораке доказа Теореме 7 и показати да Релативна Поенкареова лема обезбеђује тачност форме $\frac{\partial \omega_t}{\partial t}$ и услов $X_t\big|_N \equiv 0$ (одакле следи $\phi\big|_N = \mathrm{id}_N$). ✓

Дарбуова теорема нам помаже да докажемо следеће тврђење.

Тврђење 9. *Дејство групе* $\mathrm{Ham}(M)$ *на повезаној симплектичкој многострукости M је транзитивно.*

$\triangle$ Довољно је доказати да да $\mathrm{Ham}(M)$ дејствује транзитивно на свакој Дарбуовој координатној околини. Заиста, нека су $p, q \in M$ произвољне тачке и $\gamma : [0, 1] \to M$ пут који их спаја. Криву $\gamma([0, 1])$ можемо да покријемо Дарбуовим координатним картама $U_1, U_2, \ldots, U_k$, таквим да је $p = \gamma(0) \in U_1$, $q = \gamma(1) \in U_k$, $U_j \cap U_{j+1} \neq \emptyset$. Ако p можемо да пресликамо Хамилтоновим дифеоморфизмом у тачку $\gamma(t_0) \in U_1 \cap U_2$ у истој Дарбуовој околини U_1, онда тај поступак можемо да поновимо за тачке $\gamma(t_0)$ и $\gamma(t_1) \in U_2 \cap U_3$ у Дарбуовој околини U_3 итд; на крају добијамо Хамилтонов дифеоморфизам који је композиција k тако конструисаних Хамилтонових дифеоморфизама и који слика p у q.

Докажимо да $\mathrm{Ham}(M)$ дејствује транзитивно у Дарбуовој карти (U, φ). Не умањујући општост, можемо да претпоставимо да је $\varphi(U)$ лопта. Нека су $p, q \in U$ произвољне тачке. Тачку $\varphi(p) \in \mathbb{R}^{2n}$ можемо да пресликамо у $\varphi(q) \in \mathbb{R}^{2n}$ транслацијом. У Примеру 16 на стр. 146 смо видели да је транслација генерисана векторским пољем X таквим да је $X \lrcorner \omega = dh$ за неку глатку функцију $h : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$. Нека су V и W отворени скупови који садрже дуж $[p, q]$, такви да је

$$\overline{W} \subset V \subset \varphi(U)$$

и нека је $\chi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ глатка функција, таква да је

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in W \\ 0 & x \notin V. \end{cases}$$

Тада је функција $H(x) := \chi(x)h(x)$ глатка и једнака h на W, па је њом генерисан Хамилтонов пут који се у W не разликује од оног генерисаног функцијом h, тј. векторским пољем X. Пошто је носач функције H садржан у V, функција $\varphi^* H$ може да се продужи до глатке функције на M. Она дефинише Хамилтонов дифеоморфизам који пресликава p у q. $\bigtriangledown$

Напомена 16. Множење Хамилтонијана H функцијом χ у доказу Тврђења 9 је важан поступак који нам омогућава да Хамилтонов дифеоморфизам изменимо у једној области многострукости, а оставимо га непромењеним у другој. Тај поступак може да се искористи да се реши следећи задатак. $\diamond$

Задатак 30. Доказати да довољно мала контрактибилна петља на торусу T^2 може да се раздвоји од себе Хамилтоновим дифеоморфизмом. Упутство: сваки симплектоморфизам је локално Хамилтонов; контрактибилна петља има просто повезану околину. ✓

Напомена 17. Неконтрактибилна петља на торусу не може да се раздвоји од себе Хамилтоновим дифеоморфизмом. Ова чињеница није тривијална. Приметимо да неконтрактибилна петља може да се раздвоји од себе симплектоморфизмом, тј. дифеоморфизмом торуса $\mathbb{T}^2$ који чува површину. На пример, петља $\mathbb{S}^1 \times \{1\} \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ може да се раздвоји од себе ротацијом

$$R_\alpha : (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \mapsto (e^{i\theta_1}, e^{i(\theta_2+\alpha)}).$$

Ротација торуса је симплектоморфизам, који није Хамилтонов (ово смо видели у Примеру 18 на стр. 147). На неконтрактибилну петљу не можемо да применимо метод решења Задатка 30 зато што она нема просто повезану околину. $\diamond$

2.4. Комплексне и скоро комплексне структуре. *Комплексна структура* на векторском простору V над пољем $\mathbb{R}$ је линеарно пресликавање

$$J : V \to V \qquad \text{за које важи} \qquad J^2 = -\mathrm{id}_V,$$

где је $J^2 := J \circ J$. Из

$$(-1)^{\dim V} = \det(-\mathrm{id}_V) = \det(J^2) = (\det J)^2$$

следи да скоро комплексна структура постоји само на векторским просторима парне димензије и да је $|\det J| = 1$. Специјално, J је линеарни изоморфизам.

Пример 23. **(Комплексни векторски простори)** Нека је V векторски простор над $\mathbb{C}$ и нека је $\dim_{\mathbb{C}} V = n$. Тада је са

$$J : V \to V, \qquad Jv := iv$$

дефинисана комплексна структура на V. Пресликавање J је изоморфизам, па ако је $v_1, \ldots, v_n$ база у V, онда је и $Jv_1, \ldots, Jv_n$ база. Простор V може да се посматра као векторски простор над $\mathbb{R}$: множење скаларом $V \times \mathbb{R} \to V$ је рестрикција множења $V \times \mathbb{C} \to V$. Вектори

$$\{v_1, \ldots, v_n, Jv_1, \ldots, Jv_n\} = \{v_1, \ldots, v_n, iv_1, \ldots, iv_n\}$$

су линеарно независни над $\mathbb{R}$, јер би у противном вектори $v_1, \ldots, v_n$ били линеарно зависни над $\mathbb{C}$, што је немогуће пошто они формирају базу. Одатле следи да је димензија простора V, као реалног векторског простора, $\dim_{\mathbb{R}} V = 2n$. Систем вектора

$$v_1, \ldots, v_n, Jv_1, \ldots, Jv_n$$

је једна база векторског простора V над $\mathbb{R}$.

Обрнуто, ако је V векторски простор над $\mathbb{R}$ парне димензије $\dim V = 2n$, онда на њему постоји комплексна структура[10] $J : V \to V$, па је са

$$(a + ib)v := av + bJv, \qquad a, b \in \mathbb{R},\ v \in V$$

дефинисано множење $V \times \mathbb{C} \to V$ комплексним скаларом, па V има и структуру векторског простора над $\mathbb{C}$ димензије $\dim_{\mathbb{C}} V = n$. $\sharp$

Из претходног примера следи да реалне векторске просторе парне димензије на којима је задата комплексна структура можемо да идентификујемо са комплексним векторским просторима двоструко мање димензије. Специјално, група симетрија структуре (V, J), где је V векторски простор над $\mathbb{R}$ димензије $2n$ са комплексном структуром J је изоморфна групи $GL(n, \mathbb{C})$. Она је подгрупа групе симетрија векторског простора V, која је изоморфна групи $GL(2n, \mathbb{R})$: елементи групе $GL(n, \mathbb{C})$ су линеарни изоморфизми $S : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ који чувају комплексну структуру

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_n \\ -\mathrm{id}_n & 0 \end{bmatrix}$$

тј. за које важи

$$S \circ J_0 = J_0 \circ S.$$

Инклузија $GL(n, \mathbb{C}) \hookrightarrow GL(2n, \mathbb{R})$ назива се *реалном репрезентацијом* Лијеве групе $GL(n, \mathbb{C})$. Ако пресликавање S посматрамо као пресликавање $S : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ и раздвојимо на реални и имагинарни део, реална репрезентација је задата, у матричном облику, са

$$S = A + iB \mapsto \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}.$$

Пример 24. (Комплексификација) Ако је V реални простор димензије $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, онда је $V \otimes \mathbb{C}$ комплексни векторски простор димензије $\dim_{\mathbb{C}} V \otimes \mathbb{C} = n$. Овај простор назива се *комплексификацијом* векторског простора V. Из Примера 23 следи да $V \otimes \mathbb{C}$ може да се посматра као реални векторски простор димензије $\dim_{\mathbb{R}} V \otimes \mathbb{C} = 2n$ са природно дефинисаном комплексном структуром. $\sharp$

Дефиниција 25. *Скоро комплексна структура* на многострукости M је фамилија комплексних структура

$$J_p : T_pM \to T_pM, \qquad J_p^2 = -\mathrm{id}_{T_pM}$$

која глатко зависи од p. Другим речима, скоро комплексна структура је глатко пресликавање $TM \to TM$ које је линеарно на влакнима (тј. морфизам раслојења), такво да је $J \circ J = -\mathrm{id}_{TM}$. *Скоро комплексна многострукост* је глатка многострукост на којој је задата скоро комплексна структура. $\diamondsuit$

[10] Нпр. дефинисана са $J : (v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n) \mapsto (w_1, \ldots, w_n, -v_1, \ldots, -w_n)$ за неку базу $(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n)$.

Лема 12. *Свака скоро комплексна многострукост је оријентабилна и има парну димензију.*

$\triangle$ Парност димензије смо већ доказали у линеарном случају, па сваки тангентни простор T_pM, а тиме и многострукост M, има парну димензију.

Нека је $\dim M = 2n$ и нека су у свакој координатној карти U дата векторска поља

$$X_1, \ldots, X_n : U \to T_U M \cong TU,$$

таква да су за свако $p \in U$ вектори $X_1(p), \ldots, X_n(p) \in T_pM$ линеарно независни. Као што смо видели у Примеру 23, $X_1, \ldots, X_n, JX_1, \ldots, JX_n$ је база у T_pM. Матрица преласка са једне тако конструисане базе на другу припада групи $GL(n, \mathbb{C})$, па је, на основу познате чињенице из Линеарне алгебре

$$S \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \cong \mathbb{C}^{n\times n} \;\Rightarrow\; \det_{\mathbb{R}} S = |\det_{\mathbb{C}} S|^2, \tag{49}$$

њена детерминанта позитивна. То нам омогућава да дефинишемо оријентисани атлас $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$ на M, захтевом да је за свако p

$$(\varphi_\lambda)_*(p)X_1(p), \ldots, (\varphi_\lambda)_*(p)X_n(p), (\varphi_\lambda)_*(p)JX_1(p), \ldots, (\varphi_\lambda)_*(p)JX_n(p) \tag{50}$$

оријентисана база у $\mathbb{R}^{2n}$.

Или, другим речима, за свако λ постоји $2n$–форма μ_λ у $\mathbb{R}^{2n}$ која је позитивна на бази (50). Због (49) избор такве форме не зависи од избора такве базе. Користећи разлагање јединице, помоћу фамилије $\{\mu_\lambda\}_\lambda$ можемо да конструишемо форму оријентације на M. $\bigtriangledown$

Напомена 18. Тврђење обрнуто тврђењу Леме 12 не важи; нпр. сфера $\mathbb{S}^4$ је оријентабилна и има парну димензију, али не допушта скоро комплексну структуру (теорема Ересмана и Хопфа). $\diamond$

Дефиниција 26. По аналогији са дефиницијом холоморфности пресликавања у Комплексној анализи, као својства $\mathbb{C}$–линеарности првог извода, пресликавање $f : N \to M$ скоро комплексних многострукости (N, J_N) и (M, J_M) називамо *псеудо холоморфним*, или, некад, краће, *холоморфним* ако је

$$Df \circ J_N = J_M \circ Df.$$

Ако желимо да подвучемо о којим се скоро комплексним структурама ради, користимо термин (J_N, J_M)–*холоморфна пресликавања.* Ако је $N = \mathbb{C}^n$ и J_N стандардна комплексна структура на $\mathbb{C}^n$ и J комплексна структура на M користимо и термин J–*холоморфна пресликавања.* Специјално, *холоморфна крива* је холоморфно пресликавање $f : \Sigma \to M$ једнодимензионе комплексне многострукости Σ у M. Једнодимензионе комплексне многострукости називају се *Римановим површима.* $\Diamond$

Напомена 19. У доказу Леме 12 смо видели да комплексно линеарна пресликавања имају својство (49), одакле следи да она чувају оријентацију. Из истог разлога, (псеудо) холоморфна пресликавања чувају оријентацију скоро комплексних многострукости, установљену Лемом 12. $\diamond$

Пример 25. Сфера $\mathbb{S}^2$ има скоро комплексну структуру, дефинисану на следећи начин. Посматрајмо $\mathbb{S}^2$ на уобичајени начин, као подскуп у $\mathbb{R}^3$. Пошто је сфера оријентабилна, на њој постоји поље јединичних нормалних вектора

$$N : \mathbb{S}^2 \to (T\mathbb{S}^2)^\perp.$$

За свако $p \in \mathbb{S}^2$ са

$$J_p : T_p\mathbb{S}^2 \to T_p\mathbb{S}^2, \qquad J_p(X) := X \times N,$$

где је $\times$ векторски производ у $\mathbb{R}^3$, је добро дефинисано линеарно пресликавање које задовољава $J_p^2 = -\mathrm{id}_{T_p\mathbb{S}^2}$, дакле скоро комплексна структура на $\mathbb{S}^2$.

Очигледно је да на исти начин можемо да снабдемо комплексном структуром сваку оријентабилну површ у $\mathbb{R}^3$.

Познато је да векторски производ можемо да идентификујемо са множењем имагинарних кватерниона. На сличан начин, користећи множење имагинарних Кејлијевих бројева (октава), можемо да дефинишемо скоро комплексну структуру на свакој оријентабилној хиперповрши у $\mathbb{R}^7$. Специјално, сфера $\mathbb{S}^6$ има скоро комплексну структуру.

Овај метод не можемо да имитирамо у осталим димензијама, јер је познато да на $\mathbb{R}^n$ постоји множење које је билинеарно и у односу на које су сви елементи сем нуле инвертибилни ако и само ако је $n \in \{1, 2, 4, 8\}$. Другим речима, реални и комплексни бројеви, кватерниони и октаве су једине алгебре са дељењем (ово тврђење су, независно један од другог, доказали Кервер и Милнор 1958. године, методама хомотопске топологије).

Борел и Сер су, 1953. године, доказали да су једине сфере које допуштају скоро комплексну структуру $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{S}^6$. Специјални случај тог тврђења је теорема Ересмана и Хопфа, споменута у Напомени 18. $\sharp$

Тврђење 10. *На свакој симплектичкој многострукости (M, ω) постоји комплексна структура J, таква да је*

$$\omega(X, JX) > 0 \qquad \text{и} \qquad \omega(JY, JZ) = \omega(Y, Z) \tag{51}$$

за све тангентне векторе $X \neq 0$, Y, Z.

$\triangle$ Нека је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ произвољна Риманова метрика на M. Пошто је ω недегенерисана и антисиметрична, из Рисове теореме о репрезентацији билинеарних функционала следи да постоји антисиметрични изоморфизам раслојења

$$A : TM \to TM, \qquad \omega(X, Y) = \langle AX, Y \rangle.$$

Из Линеарне алгебре нам је познато да сваки инвертибилни линеарни оператор има јединствено поларно разлагање $A = PJ$, где је $P = \sqrt{AA^\top}$ позитивно дефинитни симетрични, а $J = P^{-1}A$ ортогонални оператор, тј.

$$\langle PX, X \rangle > 0 \quad \text{за} \quad X \neq 0 \qquad \text{и} \qquad \langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

Није тешко видети да оператори P и A комутирају[11], а самим тим и P^{-1} и A. Одатле следи $JP = PJ$.

Из антисиметричности оператора A следи

$$PJ = A = -A^\top = -(PJ)^\top = -(JP)^\top = -P^\top J^\top = -PJ^\top,$$

тј. $J = -J^\top$. Пошто је оператор J ортогоналан, одатле добијамо

$$J^2 = -J^\top J = -\mathrm{id},$$

чиме је доказано да је J скоро комплексна структура.

Прва једнакост у (51) следи из

$$\omega(X, JX) = \langle AX, JX \rangle = \langle JPX, JX \rangle = \langle PX, X \rangle$$

[11] Ако матрица A комутира са матрицом B, онда он комутира и са сваком аналитичком функцијом од B, $f(B) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n B^n$, а квадратни корен је аналитичка функција.

и позитивне дефинитности оператора P. Друга једнакост следи из дефиниције оператора A, комутативности $AJ = JA$ и ортогоналности оператора J. $\bigtriangledown$

Напомена 20. Обрнуто тврђење не важи: у Примеру 25 смо видели да сфера $\mathbb{S}^6$ допушта скоро комплексну структуру, док због $H^2_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^6) = 0$ не допушта симплектичку. $\diamond$

Задатак 31. Да ли многострукост $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ допушта

(а) скоро комплексну;
(б) симплектичку

структуру? ✓

Дефиниција 27. Кажемо да је скоро комплексна структура *сагласна са симплектичком формом* ω ако је испуњен услов (51) Тврђења 10. $\Diamond$

Ако је комплексна структура J сагласна са ω, онда је $\omega(\cdot, J\cdot)$ Риманова метрика на M.

Напомена 21. У доказу Тврђења 10 нисмо користили услов $d\omega = 0$, што значи да то тврђење важи за сваку недегенерисану, не обавезно затворену, форму $\omega \in \Omega^2(M)$. Нека је ∇ коваријантни извод у односу на Риманову метрику $\langle \cdot, \cdot \rangle = \omega(J\cdot, \cdot)$. Тада је

$$d\omega(X, Y, Z) = \langle (\nabla_X J)Y, Z \rangle + \langle (\nabla_Z J)X, Y \rangle + \langle (\nabla_Y J)Z, X \rangle, \tag{52}$$

где је $\nabla_V J : TM \to TM$ коваријантни извод пресликавања $J : TM \to TM$, дефинисан са

$$(\nabla_V J)W := \nabla_V(JW) - J\nabla_V W$$

(тј. уопштењем Лајбницовог правила: $\nabla_V(JW) = (\nabla_V J)W + J\nabla_V W$). Специјално, на симплектичким многострукостима је десна страна израза (52) једнака нули. $\diamond$

Тврђење 11. *Скуп* $\mathcal{J}_\omega$ *свих скоро комплексних структура на симплектичкој многострукости* (M, ω), *сагласних са* ω, *има структуру контрактибилног тополошког простора.*[12]

$\bigtriangleup$ Нека је $\mathcal{G}$ скуп Риманових метрика на M и

$$f : \mathcal{J}_\omega \to \mathcal{G}, \qquad f(J) := \omega(J\cdot, \cdot).$$

Нека је $g : \mathcal{G} \to \mathcal{J}_\omega$ пресликавање конструисано у доказу Тврђења 10 (оно је добро дефинисано због јединствености поларног разлагања). Пошто је $\mathcal{G}$ афини простор, он је контрактибилан, па је $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$. Из конструкције пресликавања f и g следи $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{J}}$, па је $\mathcal{J}_\omega \simeq \mathcal{G}$. $\bigtriangledown$

Задатак 32. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост, J скоро комплексна структура сагласна са ω и $N \subset M$ скоро комплексна подмногострукост (тј. подмногострукост многострукости M, затворена у односу на множење са J: $J(TN) \subset TN$). Доказати да је $(N, \omega\big|_N)$ симплектичка многострукост. ✓

[12] Може да се докаже и висе: $\mathcal{J}_\omega$ је контрактибилна бесконачно димензиона многострукост.

Напомена 22. Ако је $H \in C_c^\infty(M)$ (аутономни) Хамилтонијан, његово Хамилтоново векторско поље X_H је дефинисано са

$$\omega(X_H, Y) = dH(Y) \qquad \text{за све} \qquad Y. \tag{53}$$

Пошто је у присуству Римановe метрике дефинисан градијент ∇H, као векторско поље дуално (у односу на ту Риманову метрику) ковекторском пољу dH, тј.

$$dH(Y) = \omega(J\nabla H, Y) \qquad \text{за све} \qquad Y,$$

из (53) следи да је

$$X_H = J\nabla H.$$

Специјално, важи $X_H \perp \nabla H$. $\diamond$

Задатак 33. Нека је C затворена крива на оријентисаној површи (Σ, ω) и нека је $H : \Sigma \to \mathbb{R}$ Хамилтонијан. Доказати да је X_H негде тангентно на C. ✓

2.5. Флукс хомоморфизам. Нека је (M, ω) затворена (тј. компактна без границе) симплектичка многострукост. Као и раније, са $\mathrm{Symp}_0(M)$ означавамо компоненту повезаности групе симплектоморфизама $\mathrm{Symp}(M)$ која садржи идентичко пресликавање id_M. Нека је

$$\pi : \widetilde{\mathrm{Symp}_0}(M) \to \mathrm{Symp}_0(M) \tag{54}$$

универзално наткривање групе $\mathrm{Symp}_0(M)$. Знамо да универзално наткривање тополошког простора са истакнутом тачком може да се реализује као скуп хомотопских класа путева са фиксираним крајевима. У конкретном случају, $\widetilde{\mathrm{Symp}_0}(M)$ је скуп свих класа еквиваленције путева $\psi_t \in \mathrm{Symp}_0(M)$ $(0 \le t \le 1)$ у односу на релацију еквиваленције

$$\psi_t \sim \phi_t \quad \Longleftrightarrow \quad \psi_1 = \phi_1 \ \text{ и } \ \psi_t \simeq \phi_t,$$

где се под хомотопијом $\simeq$ подразумева хомотопија са фиксираним крајевима. Пројекција (54) дефинисана је са $\pi([\psi_t]) = \psi)1$.

На $\widetilde{\mathrm{Symp}_0}(M)$ можемо да задамо структуру групе[13] са

$$[\psi_t] \cdot [\phi_t] := [\psi_t \circ \phi_t], \tag{55}$$

или, еквивалентно, помоћу настављања путева:

$$[\psi_t] \cdot [\phi_t] := [\vartheta_t], \qquad \text{где је} \qquad \vartheta_t := \begin{cases} \phi_{2t} & 0 \le t \le 1/2 \\ \psi_{2t-1} \circ \phi_1 & 1/2 \le t \le 1. \end{cases} \tag{56}$$

Лако се види да је $\psi_t \circ \phi_t \simeq \vartheta_t$ са фиксираним крајевима.

Дефиниција 28. *Флукс хомоморфизам* је пресликавање

$$F : \widetilde{\mathrm{Symp}_0}(M) \to H^1_{\mathrm{dR}}(M), \qquad F([\psi_t]) := \int_0^1 [X_t \lrcorner \omega]\, dt, \tag{57}$$

где је $X_t = \frac{d\psi_t}{dt} \circ \psi_t^{-1}$ симплектичко векторско поље дефинисано путем ψ_t. $\diamondsuit$

[13] Ово важи у општем случају, на исти начин се задаје структура групе на универзалном наткривању произвољне Лијеве групе.

Да бисмо видели да је ова дефиниција добра, приметимо да из Стоксове теореме следи да је, за повезану многострукост M, $H^1_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{R})$; ова идентификација[14] се остварује са

$$H^1_{\mathrm{dR}}(M) \ \ni \ [\sigma] \mapsto \int_{\mathbb{S}^1} \gamma^*\sigma,$$

где је $\gamma : \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to M$ глатки представник класе $[\gamma] \in \pi_1(M)$. Тако се флукс хомоморфизам идентификује са хомоморфизмом $\pi_1(M) \to \mathbb{R}$

$$\gamma \mapsto \int_0^1 \int_0^1 \omega(X_t(\gamma(s)), \dot{\gamma}(s))\, dtds. \tag{58}$$

Пошто је векторско поље X_t симплектичко, форма $X_t \lrcorner \omega$ је затворена, па десна страна у (58) зависи само од хомотопске класе петље γ. Покажимо и да она зависи само од хомотопске класе пута ψ_t са фиксираним крајевима. Нека је

$$c : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to M, \qquad c(s,t) = \psi_t^{-1}(\gamma(s))$$

цилиндар добијен еволуцијом петље $\gamma(s)$ дуж симплектичког пута ψ_t^{-1}. Диференцирањем израза $\psi_t(c(s,t)) = \gamma(s)$ добијамо

$$\dot{\gamma(s)} = (\psi_t)_* \frac{\partial c}{\partial s}, \qquad X_t(\gamma(s)) = (\psi_t)_* \frac{\partial c}{\partial s},$$

па израз (58) може да се напише као

$$\gamma \mapsto \iint_{\mathbb{S}^1 \times [0,1]} c^*\omega.$$

Из Стоксове теореме следи да десна страна овог израза зависи само од хомотопске класе цилиндра c чије су базе петље γ и $\psi_1^{-1} \circ \gamma$, па се не мења ако се пут ψ_t варира у истој хомотопској класи са фиксираним крајевима. Тиме је показано да је пресликавање F добро дефинисано. Да је оно хомоморфизам се види из дефиниције множења (56), дефиниције флукса (57) и смене промењљиве у интегралу. Или, на други начин, помоћу дефиниције множења (55) и чињенице да је, ако су X_t и Y_t симплектичка векторска поља дефинисана путевима ψ_t и ϕ_t, пут $\psi_t \circ \phi_t$ генерисан симплектичким векторским пољем $X_t + (\psi_t)_* Y_t$.

Напомена 23. Ако је M некомпактна симплектичка многострукост, на исти начин се дефинише флукс хомоморфизам

$$F : \mathrm{Symp}_0^c(M) \to H^1_{\mathrm{dR},c}(M)$$

где је $H^1_{\mathrm{dR},c}(M)$ де Рамова кохомологија са компактним носачем. Дефиниција у случају компактне многострукости је специјални случај ове дефиниције, јер је тада $\mathrm{Symp}_0^c(M) = \mathrm{Symp}_0(M)$ и $H^1_{\mathrm{dR},c}(M) = H^1_{\mathrm{dR}}(M)$. $\diamond$

Задатак 34. Доказати да је у котангентном раслојењу, или, општије, на свакој *тачној симплектичкој многострукости* (M, ω) (тј. таквој да је симплектичка форма $\omega = -d\lambda$ за неку 1–форму λ),

$$F([\psi_t]) = [\lambda - \psi_1^*\lambda]$$

---

[14]За повезано M релација $H^1_(M; G) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$ важи за сваку Абелову групу G. Ово следи из Формуле универзалних коефицијената и Хуревичеве теореме о вези између група $H_n(M, \mathbb{Z})$ и $\pi_n(M)$ за $n = 1$.

за сваки пут $\psi_t \in \psi_t \in \mathrm{Symp}_0^c(M)$. Приметимо да из Стоксове теореме следи да тачна симплектичка многострукост не може да буде затворена, тако да нам је у овом задатку неопходна дефиниција флукса из Напомене 23. ✓

Теорема 10. *Симплектоморфизам* $\psi \in \mathrm{Symp}_0^c(M)$ *је Хамилтонов ако и само ако постоји пут*

$$[0,1] \to \mathrm{Symp}_0(M), \qquad \psi_0 = \mathrm{id}_M, \qquad \psi_1 = \psi$$

такав да је $F([\psi_t]) = 0$.

$\triangle$ ($\Rightarrow$) Ако је ψ_t Хамилтонов пут и X_t њиме дефинисано Хамилтоново поље, онда је $X_t \lrcorner \omega$ тачна форма, па је $F([\psi_t]) = 0$.

($\Leftarrow$) Нека је ψ_t пут у $\mathrm{Symp}_0^c(M)$ који спаја id_M и ψ, такав да је $F([\psi_t]) = 0$. Доказаћемо да је он хомотопски еквивалентан, са фиксираним крајевима, путу у $\mathrm{Ham}(M)$.

Нека је X_t симплектичко векторско поље дефинисано путем ψ_t. По претпоставци, форма

$$\int_0^1 X_t \lrcorner \omega \, dt \in \Omega_c^1(M)$$

дефинише тривијалну класу у $H^1_{\mathrm{dR},c}(M)$, тј.

$$\int_0^1 X_t \lrcorner \omega \, dt = dF$$

за неку функцију $K \in C_c^\infty(M)$. Она дефинише Хамилтонов ток ϕ_t^K који је аутономан, па је $\phi_{s+t}^K = \phi_s^K \circ \phi_t^K$. Специјално, $(\phi_s^K)^{-1} = \phi_{-s}^K$. Пошто је $(\phi_1^K)^{-1} = (\phi_{-1}^K)$ Хамилтонов дифеоморфизам, довољно је да докажемо да је дифеоморфизам $\varphi = (\phi_1^K)^{-1} \circ \psi$ Хамилтонов. Пут

$$\varphi_t := \begin{cases} \psi_{2t} & 0 \le t \le 1/2 \\ \phi_{1-2t}^K \circ \psi & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

у $\mathrm{Symp}_0^c(M)$ спаја id_M и φ. Можемо, после репараметризације уколико је потребно (видети Задатак 15 на стр. 147), да претпоставимо да је он генерисан симплектичким векторским пољем Y_t, таквим да је

$$\int_0^1 Y_t \, dt = 0.$$

Нека је

$$Z_t := -\int_0^t Y_u \, du.$$

Пошто је

$$d(Z_t \lrcorner \omega) = -\int_0^t d(Y_u \lrcorner \omega) \, du = 0$$

поље Z_t је симплектичко. Нека је, за фиксирано t, $\chi_{s,t} \in \mathrm{Symp}_0^c(M)$ њиме генерисан пут симплектоморфизама. Пошто је $Z_0 = Z_1 = 0$, следи да је $\chi_{s,0} = \chi_{s,1} = \mathrm{id}_M$.

Из чињенице да је F хомоморфизам и да зависи само од хомотопске класе пута, следи да је, за свако $T \in [0,1]$

$$F([\chi_{1,t} \circ \varphi_t]_{0 \le t \le T}) = [Z_T \lrcorner \omega] + \int_)^T [Y_t \lrcorner \omega] \, dt = 0.$$

То значи да је, ако је V_t симплектичко векторско поље које генерише пут $\chi_{1,t} \circ \varphi_t$, форма

$$\int_0^T V_t \lrcorner \omega \, dt \in \Omega^1_c(M)$$

тачна за свако T, тј. да је

$$\int_0^T V_t \lrcorner \omega \, dt = dG_T$$

за неко $G_T \in C^\infty_c(M)$. Диференцирањем по T закључујемо да је $V_t \lrcorner \omega$ тачна форма, тј. да је $\chi_{1,t} \circ \varphi_t$ Хамилтонов пут. Специјално, $\varphi_1 = \chi_{1,1} \circ \varphi_1$ је Хамилтонов дифеоморфизам. $\bigtriangledown$

Последица 6. *Нека је ψ_t пут у $\mathrm{Symp}^c_0(M)$, такав да је $F([\psi_t]) = 0$. Тада је ψ_t хомотопан, са фиксираним крајевима, путу у $\mathrm{Ham}(M)$.*

$\bigtriangleup$ Доказ је садржан у доказу Теореме 10. $\bigtriangledown$

Последица 7. $\mathrm{Ham}(M)$ *је нормална подгрупа групе* $\mathrm{Symp}^c_0(M)$.

$\bigtriangleup$ Ово је други начин да се докаже Последица 3 на стр. 148. Језгро хомоморфизма група је увек нормална подгрупа; експлицитније, ако је ψ_t Хамилтонов ток, а ϕ_t пут у $\mathrm{Symp}^c_0(M)$ који полази из $\phi_0 = \mathrm{id}_M$, онда је

$$F([\phi_t \circ \psi_t \circ (\phi_t)^{-1}]) = 0,$$

па је, на основу Теореме 10, $\phi_1 \circ \psi_1 \circ (\phi_1)^{-1}]$ Хамилтонов дифеоморфизам. $\bigtriangledown$

Дефиниција 29. Слика хомотопских класа петљи

$$\Gamma_\omega := F(\pi_1(\mathrm{Symp}^c_0(M))) \subset H^1_{\mathrm{dR},c}(M)$$

при флукс хомоморфизму F назива се *Флукс групом* или *Калабијевом групом* многострукости (M, ω). $\diamondsuit$

Теорема 10 даје критеријум, у терминима флукса, за постојање Хамилтоновог тока за симплектоморфизам ψ, таквог да је $\psi_1 = \psi$. Конкретан пут $\psi_t \in \mathrm{Symp}^c_0(M)$ који спаја ψ_1 и id_M не мора да буде Хамилтонов ток, и ако ψ_1 јесте Хамилтонов дифеоморфизам. Карактеризацију Хамилтонових дифеоморфизама помоћу флукса, у оваквим случајевима, даје следећа теорема.

Теорема 11. *Нека је ψ_t пут у $\mathrm{Symp}^c_0(M)$, такав да је $\psi_0 = \mathrm{id}_M$. Тада је ψ_1 Хамилтонов дифеоморфизам ако и само ако је $F([\psi_t]) \in \Gamma_\omega$.*

$\bigtriangleup$ ($\Rightarrow$) Ако је $\psi_1 \in \mathrm{Ham}(M)$, онда постоји Хамилтонов ток ϕ_t, такав да је $\phi_1 = \psi_1$. Из Последице 6 следи да постоји петља у класи $[(\phi_t)^{-1} \circ \psi_t] \in \pi_1(\mathrm{Symp}^c_0(M))$ таква да је $F([(\phi_t)^{-1}]) = 0$, па је $F([(\phi_t)^{-1} \circ \psi_t]) = F([\psi_t])$, па је $F([\psi_t]) \in \Gamma_\omega$.

($\Leftarrow$) Ако је $F([\psi_t]) \in \Gamma_\omega$ онда постоји петља φ_t у Symp^c_0, таква да је $F([\psi_t]) = F([\varphi_t])$. Нека је ϕ_t пут у $\mathrm{Symp}^c_0(M)$, такав да је $\phi_0 = \mathrm{id}_M$, $\phi_1 = \psi_1$ и $[(\phi_t)^{-1} \circ \psi_t] = [\varphi_t]$. Пошто је

$$F([\psi_t]) = F([\varphi_t]) = F([(\phi_t)^{-1}]) + F([\psi_t]),$$

закључујемо да је $F([\phi_t]) = 0$, па из Теореме 10 следи да је $\phi_1 = \psi_1$ Хамилтонов дифеоморфизам. $\bigtriangledown$

Последица Теореме 11 је Теорема 5 на стр. 149; овде је издвајамо у следећој формулацији:

Последица 8. *Нека је* ψ_t *пут у* $\mathrm{Ham}(M)$. *Тада је*

$$\frac{d\psi_t}{dt} \lrcorner \omega \in \Omega^1_c(M)$$

тачна форма.

$\triangle$ Можемо да претпоставимо да је $\phi_0 = \mathrm{id}_M$; у противном бисмо посматрали пут $\psi_0^{-1} \circ \psi_t$. Приметимо да тврђење није тривијално ни у овом случају: за свако $s \in [0,1]$ дифеоморфизам ψ_s може да се споји са id_M Хамилтоновим током $\phi_{t,s}$. Ми треба да докажемо да је и сам пут ψ_t Хамилтонов ток.

Нека је $\chi_{s,t}$ петља у $\mathrm{Symp}^c_0(M)$ добиена надовезивањем пута ψ_t за $0 \leq t \leq s$ и Хамилтоновог тока $\phi_{t,s}$ који спаја id_M са ψ_s (репараметризујемо ове токове тако да добијемо петљу, тј. да параметар расте од id_M до ψ_s, а затим опет расте од ψ_s до id_M. Пошто је $\phi_{t,s}$ Хамилтонов ток, његов флукс је нула, па је $F([\psi_t]_{0 \leq t \leq s}) \in \Gamma_\omega$.

Из (58) следи да се вредност флукса на петљи у $\mathrm{Symp}^c_0(M)$ добија као интеграл симплектичке форме ω по торусу $\mathbb{T}^2 \hookrightarrow M$, па је скуп његових могућих вредности подскуп скупа

$$\{\langle[\omega], j_*[\mathbb{T}^2]\rangle\}\langle[\omega], H_2(M;\mathbb{Z})\rangle,$$

где је за $j : \mathbb{T}^2 \hookrightarrow M$ са $j_*[\mathbb{T}^2]$ означена слика фундаменталне класе $[\mathbb{T}^2] \in H_2(\mathbb{T}^2;\mathbb{Z})$ при пресликавању $j_* : H_2(\mathbb{T}^2;\mathbb{Z}) \to H_2(M;\mathbb{Z})$, а са $\langle[\omega], j_*[\mathbb{T}^2]\rangle$ вредност кохомолошке класе $[\omega]$ на хомолошкој класи $j_*[\mathbb{T}^2]$, тј. $\int_{\mathbb{T}^2} j^*\omega$. Пошто је скуп $\langle[\omega], H_2(M;\mathbb{Z})\rangle$ пребројив, одатле следи да је Γ_ω дискретан скуп, па је

$$s \mapsto F([\psi_t]_{0 \leq t \leq s}) \in \Gamma_\omega \subset H^1_{\mathrm{dR},c}(M)$$

константно пресликавање. Пошто је за $s = 0$ оно једнако нули, следи да је за свако $s \in [0,1]$ форма

$$\int_0^s X_t \lrcorner \omega \, dt \in \Omega^1_c(M)$$

(где је X_t симплектичко векторско поље које генерише ψ_t) тачна. Диференцирањем по s закључујемо да је $X_s \lrcorner \omega$ тачна форма. $\bigtriangledown$

2.6. Лагранжеве подмногострукости. Већ смо се сусрели са дефиницијом Лагранжевих подмногострукости: ако је (M, ω) симплектичка многострукост димензије $2n$, онда је подмногострукост L Лагранжева ако је њена димензија n и $\omega(X, Y) = 0$ за сваки пар X, Y вектора тангентних на L. Из недегенерисаности симплектичке форме следи да је n максимална димензија подмногострукости на којој се симплектичка форма анулира; Лагранжеве многострукости су, дакле, максималне у том смислу.

Пример 26. Свака глатка регуларна крива на дводимензионој симплектичкој многострукости (оријентабилној површи) је Лагранжева подмногострукост. Специјално, $\mathbb{S}^1$ је Лагранжева многострукост у $\mathbb{C} \cong T^*\mathbb{R}$. Пошто је стандардна симплектичка форма на $\mathbb{C}^n \cong T^*\mathbb{R}^n$ дата као директан производ, следи да је торус $\mathbb{T}^n \cong (\mathbb{S}^1)^n$ Лагранжева подмногострукост у $\mathbb{C}^n$. Пошто је, на основу Дарбуове теореме, свака симплектичка многострукост локално еуклидска, следи да у околини произвољне тачке симплектичке многострукости постоји Лагранжева подмногострукост – Лагранжев торус. $\sharp$

Пример 27. Покажимо да је подмногострукост M_c из Арнолд–Лиувилове теореме (Теорема 6 на стр. 151) Лагранжева подмногострукост.

По претпоставци, c је регуларна тачка пресликавања F, па је M_c многострукост на основу Теореме о рангу (Последица 1 на стр. 7).

Пошто је, због недегенерисаности симплектичке форме, пресликавање

$$TM \to T^*M, \qquad X \mapsto X \lrcorner \omega$$

изоморфизам, из независности диференцијала $dF_1, \dots, dF_n$ следи независност Хамилтонових векторских поља $X_{F_1}, \dots, X_{F_n}$, па она дају базу тангентног простора T_pM_c за свако $p \in M_c$. Одатле следи да је $\dim M_c = n$. Пошто је

$$\omega(X_{F_j}, X_{F_k}) = \{F_j, F_k\} = 0$$

M_c је Лагранжева подмногострукост. $\sharp$

Пример 28. Видели смо да на котангентном раслојењу T^*M постоји канонска симплектичка структура $\omega_0 = -d\lambda$, где је λ Лиувилова 1–форма. Ако је сама многострукост M симплектичка, са симплектичком формом ω_M, онда се помоћу изоморфизма

$$\Phi : TM \to T^*M, \qquad \Phi : V \mapsto V \lrcorner \omega_M$$

и симплектичке форме ω_0 на T^*M задаје симплектичка форма $\omega_1 := \Phi^*\omega_0$ и на TM.

Нека је $X : M \to TM$ сечење тангентног раслојења, тј. векторско поље на M. Тада је $X(M) \subset TM$ подмногострукост димензије $\frac{1}{2}\dim TM$. Ова подмногострукост је Лагранжева (као подмногострукост симплектичке многострукости (TM, ω_1)) ако и само ако је векторско поље X симплектичко (као векторско поље на симплектичкој многострукости (M, ω_M). Ово је аналогија Примера 8 на стр. 133. $\sharp$

Задатак 35. Ознаке и појмови у овом задатку односе се на Пример 28.

(а) Доказати да је симплектичка форма ω_1 из тачна, што нам омогућава да дефинишемо *тачне Лагранжеве подмногострукости* у тангентном раслојењу TM *симплектичке* многострукости M.

(б) Доказати да је $X(M)$ тачна Лагранжева подмногострукост ако и само ако је векторско поље X Хамилтоново. ✓

Појам *тачне* Лагранжеве подмногострукости има смисла у тачној симплектичкој многострукости, тј. симплектичкој многострукости (M, ω) где је $\omega = d\alpha$ за неку 1–форму α. Форма α се у том случају назива *симплектичким потенцијалом.*

Лако је видети да не постоји компактна тачна Лагранжева подмногострукост у $\mathbb{C}$ – ако је $\iota : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ улагање и $\lambda = pdq$ Лиувилова форма у $\mathbb{C}$, из Стоксове теореме следи да $\iota^*\lambda$ не може да буде тачна форма. Нетривијалан резултат, који је доказао Громов у [**33**], је да не постоји компактна тачна Лагранжева многострукост у $\mathbb{C}^n$ ни за једно n.

Приметимо да споменути Громовљев резултат не важи без претпоставке о компактности: као што смо видели у параграфу о котангентним раслојењима, постоји много примера некомпактних тачних Лагранжевих подмногострукости у $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$. Такође, резултат о немогућности тачног Лагранжевог улагања многострукости у $\mathbb{C}^n$ не преноси се на имерзије; нпр. $\mathbb{S}^1$ може да се уложи у

$\mathbb{C}$ као тачна Лагранжева имерзија, као „осмица”. Да би „осмица” била тачна Лагранжева имерзија, потребно је и довољно да два круга од којих је сачињена имају исте површине – тада је интегралом Лиувилове форме дуж криве добро дефинисана њена примитивна функција. Ову конструкцију уопштава следећи пример.

Пример 29. **(Витнијева имерзија)** Посматрајмо сферу $\mathbb{S}^n$ као скуп

$$\mathbb{S}^n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|x^2\| + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

њен тангентни простор је

$$T_{(x,y)}\mathbb{S}^n = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \cdot X + yY = 0\}. \tag{59}$$

Пресликавање

$$\mathcal{W} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{C}^n, \qquad \mathcal{W}(x,y) = (1+iy)x$$

има извод

$$\mathcal{W}_*(x,y) : T_{(x,y)}\mathbb{S}^n \to \mathbb{C}^n, \qquad (X,Y) \mapsto X + i(yX + xY).$$

Очигледно је да је $(X,Y) \in \ker \mathcal{W}_*(x,y)$ ако и само ако је $X = 0$ и $Y = 0$, што значји да је $\mathcal{W}$ имерзија. Приметимо да је $\mathcal{W}$ на комплементу Јужног и Северног пола сфере бијекција и да се оба пола сликају у нулу, па $\mathcal{W}$ има једну двоструку тачку.

Вредност симплектичке форме на тангентном простору (59) може да се израчуна експлицитно:

$$\omega(X_1+i(yX_1+xY_1), X_2+i(yX_2+xY_2)) = (X_1\cdot(yX_2+xY_2) - X_2\cdot(yX_1+xY_1)) = 0.$$

Одатле следи да је имерзија $\mathcal{W}$ Лагранжева, а пошто је $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$ за $n > 1$ она је за те n тачна Лагранжева. За $n = 1$ крива $\mathcal{W}(\mathbb{S}^1)$ лако може да се скицира и да се види да се ради о „осмици” која описује два круга једнаке површине, одакле следи да је $\mathcal{W}$ тачна Лагранжева имерзија и у том случају. $\sharp$

Пример 30. Круг $\mathbb{S}^1$ је једина сфера $\mathbb{S}^n$ која може да се уложи као Лагранжева подмногострукост у $\mathbb{C}^n$, без захтева тачности: за $n > 1$ сфера $\mathbb{S}^n$ је просто повезана, па је свака затворена 1–форма на њој тачна. Ако је сфера $\mathbb{S}^n$ Лагранжева, онда је на њој $d\lambda = \omega = 0$, па је λ тачна форма. То значи да је свака Лагранжева сфера димензије $n > 1$ тачна Лагранжева подмногострукост, па из Громовљеве теореме следи да не може да се уложи у $\mathbb{C}^n$.

У општем случају, сфера $\mathbb{S}^n$ произвољне димензије може да се реализује као Лагранжева подмногострукост симплектичке многострукости двоструко веће димензије. Л. Полтерович је у [**11**] дао следећу конструкцију. Нека је ω_{FS} Фубини–Студијева симплектичка форма на $\mathbb{C}P^n$ (видети Пример 12 на стр. 141), ω_0 стандардна симплектичка форма на $\mathbb{C}^{n+1}$ и нека је $M = \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ симплектичка многострукост са симплектичком формом $\pi_1^*\omega_{FS} + \pi_2^*\omega_0$, где су

$$\pi_1, : M \to \mathbb{C}P^n, \qquad \pi_2 : M \to \mathbb{C}^{n+1}$$

пројекције на прву и другу компоненту. Знамо да пројективни простори могу да се посматрају као базе главног раслојења

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{S}^{2n+1} \\ & & \pi \downarrow \\ & & \mathbb{C}P^n \end{array}$$

(видети Пример 42 на стр. 115). Из дефиниције Фубини–Студијеве форме следи да је пресликавање

$$\iota : \mathbb{S}^{2n+1} \to M, \qquad \iota(z) = (\pi(z), \overline{z}) \tag{60}$$

Лагранжево улагање. Помоћу њега можемо да конструишемо још два Лагранжева улагања: улагање сфере $\mathbb{S}^{2n+1}$ у торус $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{T}^{2(n+1)}$ (користећи чињеницу да је сфера компактна и преласком на количних у другој компоненти M) и пројективног простора $\mathbb{C}P^n$ у $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n$ (преласком на одговарајући количник у домену и кодомену). Специјално, сфера $\mathbb{S}^2$ може да се уложи као Лагранжева подмногострукост у $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$.

У вези са овим примерима Лагранжевог улагања сфера интересантно је споменути резултат П. Сајдела [**47**] да сфера $\mathbb{S}^n$ не може да се уложи у $\mathbb{C}P^n$ као Лагранжева подмногострукост. Општије, ако компактна n–димензиона многострукост L може да се уложи као Лагранжева подмногострукост у $\mathbb{C}P^n$, онда је $H^1(L; \mathbb{Z}_{2(n+1)}) \neq 0$.

Биран и Ћилибак су доказали у [**16**] да ако компактна $2n$–димензиона многострукост L може да се уложи у $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n$ као Лагранжева подмногострукост, онда је $H^1(L;\mathbb{Z}) \neq 0$ или $H^2(L;\mathbb{Z}) \neq 0$. Специјално, једино Лагранжево улагање сфере у производ пројективних простора исте димензије је већ споменут случај дводимензионе сфере. $\sharp$

Пример 31. (Фиксне тачке антисимплектичких инволуција) Нека је f *антисимплектичка инволуција* симплектичке многострукости (M, ω), тј. пресликавање $f : M \to M$ које задовољава

$$f^*\omega = -\omega \qquad \text{и} \qquad f \circ f = \mathrm{id}_M, \tag{61}$$

и нека је L скуп њених фиксних тачака:

$$L = \{p \in M \mid f(x) = x\}.$$

Тада је L Лагранжева подмногострукост или празан скуп[15].

Заиста, ако за тренутак поверујемо да је L подмногострукост димензије $n = \frac{1}{2}\dim M$, на следећи начин можемо да видимо да је она Лагранжеца. Ако са $\iota : L \to M$ означимо инклузију, онда је $f \circ \iota = \iota$ (пошто је $f\big|_L = \mathrm{id}_L$) па је,

$$\iota^*\omega = (f \circ \iota)^*\omega = \iota^* \circ f^*\omega = -\iota^*\omega,$$

па је $\iota^*\omega = 0$.

Докажимо сада да је L подмногострукост димензије n. Приметимо прво да из (61) следи да је $f = f^{-1}$ и, специјално, да је f дифеоморфизам. Можемо да претпоставимо да је f и изометрија у односу на неку Риманову метрику на M – изаберимо произвољну Риманову метрику $\langle \cdot, \cdot \rangle$; тада је $\langle \cdot, \cdot \rangle + f^*\langle \cdot, \cdot \rangle$ Риманова метрика у односу на коју је (због $f^2 = \mathrm{id}_M$), f изометрија[16].

---

[15]Скуп фиксних тачака антисимплектичке инволуције заиста може да буде празан: дифеоморфизам торуса $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $(\theta_1, \theta_2) \mapsto (-\theta_1, \theta_2 + \pi)$ је антисимплектичка инволуција без фиксних тачака.

[16]Због инволутивности, пресликавање f може да се посматра као дејство групе $\mathbb{Z}_2$ на M, а конструисана Риманова метрика као усредњавање произвољне метрике по том дејству; слично бисмо поступили у случају дејства произвољне компактне тополошке групе, уз помоћ Харове мере на њој.

Ако је $x \in L$, онда је $f(x) = x$, па је $(f_*(x))^2 = \mathrm{Id}_{T_xM}$. Одатле следи да у некој бази простора T_xM матрица пресликавања $f_*(x)$ има облик

$$[f_*(x)] = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix},$$

где је I_n јединична $n \times n$ матрица. Заиста, ако је A инволутивна матрица, тј. $A^2 = \mathrm{I_m}$, онда A поништава полином $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$. Одатле следи да минимални полином матрице A дели полином p, па се и он разлаже на линеарне факторе. То је довољно да се закључи да матрица A може да се дијагонализује; дијагонални елементи су нуле минималног полинома, па је

$$A = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{m-k} \end{bmatrix}.$$

У случају матрице $[f_*(x)]$ је $m = 2n$ и, због услова $f^*\omega = -\omega$, $k = m - k = n$.

Нека је $X \in T_xM$ тангентни вектор за који је $f_*(x)X = X$ и γ јединствена геодезијска линија одређена условима

$$\gamma(0) = x, \qquad \dot\gamma(0) = X \tag{62}$$

параметризована природним параметром. Пошто изометрија слика геодезијске линије у геодезијске линије, а геодезијске линије су једнозначно одређене почетним условима (62), следи да је $f \circ \gamma = \gamma$, тј. $\gamma(t) \subset L$. То значи да експоненцијално пресликавање слика n–димензиони потпростор

$$\{X \in T_xM \mid f_*(x)X = X\} \subset T_xM$$

у L, чиме је доказано да је L подмногострукост димензије n. $\sharp$

Задатак 36. Користећи идеју из Примера 31 доказати да је скуп фиксних тачака изометрије Риманове многострукости тотално геодезијска подмногострукост. ✓

Задатак 37. Доказати да је скуп фиксних тачака произвољне глатке инволуције унија повезаних глатких затворених подмногострукости, у општем случају различитих димензија. ✓

Пример 32. Комплексна конјугација $z \mapsto \overline{z}$ у $\mathbb{C}^{n+1}$ дефинише антисимплектичку инволуцију на симплектичкој многострукости $\mathbb{C}P^n$ са Фубини–Студијевом симплектичком формом. Скуп фиксних тачака ове инволуције је реални пројективни простор $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$, тј. слика $\pi(\mathbb{R}^{n+1})$ при пројекцији

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}P^n.$$

Општије, ако је $M \subset \mathbb{C}P^n$ глатки комплексни пројективни варијетет (видети Пример 12 на стр. 141) задат полинимима са реалним коефицијентима, онда је реални пројективни варијетет $M \cap \mathbb{R}P^n$ Лагранжева подмногострукост у M. $\sharp$

Задатак 38. Користећи Пример 31 доказати да је пресликавање (60) Лагранжево улагање. ✓

Следеће тврђење је важно уопштење Дарбуове теореме.

Теорема 12. **(Вејнстејн)** *Нека је (M, ω) симплектичка многострукост и $L \subset M$ компактна Лагранжева подмногострукост. Нека је ω_0 канонска симплектичка форма на T^*L, добијена диференцирањем Лиувилове форме. Тада постоје отворена околина $U \supset L$ и отворена околина $V \subset T^*L$ нултог сечења $0_L \cong L$, такве да су многострукости (U, ω) и (V, ω_0) симплектоморфне.*

$\triangle$ Нека је J скоро комплексна структура на L, сагласна са ω. Из чињенице да је подмногострукост L Лагранжева следи да је

$$T_L M \cong TL \oplus JTL, \tag{63}$$

па је $\nu L \cong JTL$. По Теореми о цевастој околини, неку околину U подмногострукости L можемо да идентификујемо са околином нултог сечења раслојења JTL.

Приметимо да раслојења TL, JTL и T^*L над L имају исти ранг. Дефинишимо пресликавање

$$\psi : JTL \to T^*L, \qquad X \mapsto X \lrcorner \omega. \tag{64}$$

Ако је $\psi(Y) = 0$ за неко $Y = JX \in JTL$, онда је $0 = \omega(X, Y) = \omega(X, JX)$, што је, због сагласности J и ω, могуће само за $X = 0$. То значи да је ψ изоморфизам векторских раслојења. Ако идентификујемо околину нултог сечења у JTL са цевастом околином U подмногострукости L у M, можемо да сматрамо да је ψ пресликавање дефинисано на U. Нека је $V = \psi(U)$. Пошто пресликавање ψ наткрива идентичко пресликавање id_L и линеарно је на влакнима, његов извод на пару вектора $X \oplus Y$ из (63) је $\psi_*(X \oplus Y) = X \oplus \psi(Y)$, па је

$$\psi^*\omega_0(X_1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2) = \omega_0(X_1 \oplus \psi(Y_1), X_2 \oplus \psi(Y_2)). \tag{65}$$

Из дефиниције канонске симплектичке форме на T^*L (која уопштава Пример 1 на стр. 123), и дефиниције (64) пресликавања ψ следи да је

$$\omega_0(X_1 \oplus \psi(Y_1), X_2 \oplus \psi(Y_2)) = \psi(Y_2)X_1 - \psi(Y_1)X_2 = \omega(X_1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2). \tag{66}$$

Из (65) и (66) следи да је $\psi^*\omega_0 = \omega$ на $T_L M$, чиме је, на основу релативне Дарбуове теореме (Теорема 9 на стр. 158) доказ завршен. $\triangledown$

Напомена 24. Директна сума у (63) је ортогонална у односу на Риманову метрику $\omega(J\cdot, \cdot)$.

Ако је Лагранжева подмногострукост L подскуп неког нивоа глатке функције $H : M \to \mathbb{R}$, тј. $L \subset H^{-1}(c)$ за неку константу $c \in \mathbb{R}$, онда је $\nabla H \perp L$, (пошто је $\nabla H \perp H^{-1}(c)$), па је Хамилтоново векторско поље X_H тангентно на L (видети Напомену 22 на стр. 165). Ово тврђење познато је и као *Хамилтон–Јакобијева теорема.* Из ње следи да је подмногострукост L инваријантна у односу на Хамилтонов ток генерисан таквим Хамилтонијаном.

Специјално, ако L задато као сечење тачне форме dS у котангентном раслојењу T^*N (видети Пример 8 на стр. 133), Хамилтон–Јакобијева теорема гласи

$$H(q, dS) = c, \tag{67}$$

где су (q, p) локалне координате у T^*N. Једначина (67) назива се *Хамилтон–Јакобијевом једначином.* Ова парцијална диференцијална једначина повезује Хамилтонијан H генеришућу функцију S тачне Лагранжеве подмногострукости добијене помоћу сечења котангентног раслојења и садржане у некој хиперповрши $H = c$.

У Примеру 27 на стр. 170 смо видели да су подмногострукости M_c о којима је реч у Арнолд–Лиувиловој теореми (Теорема 6 на стр. 151) Лагранжеве. Из Хамилтон–Јакобијеве теореме следи да су оне инваријантне у односу на Хамилтонове токове $\varphi_t^{F_1}, \ldots, \varphi_t^{F_n}$ дефинсане Хамилтонијанима $F_1, \ldots, F_n$ о којима је реч у Арнолд–Лиувиловој теореми. Ако је M_c компактна, ови токови су дефинисани за свако t. Из претпоставке о инволутивности првих интеграла и Последице 4 на стр. 149 следи

$$[X_{F_j}, X_{F_k}] = \{F_j, F_k\} = 0,$$

па је[17]

$$\varphi_a^{F_j} \circ \varphi_b^{F_k} = \varphi_b^{F_k} \circ \varphi_a^{F_j} \qquad \text{за све} \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Одатле следи да је са

$$(t, x) \mapsto t \cdot x := \varphi_{t_1}^{F_1} \circ \ldots \circ \varphi_{t_n}^{F_n}(x), \qquad \text{за} \qquad t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n,\ x \in M_x \quad (68)$$

дефинисано дејство Абелове групе $(\mathbb{R}^n, +)$ на M_c.

Докажимо да је ово дејство транзитивно. Пошто су, као што смо видели у Примеру 27, векторска поља $X_{F_1}, \ldots, X_{F_n}$ линеарно независна, за свако фиксирано $x \in M_c$ пресликавање (68) је локални дифеоморфизам, па је његова слика отворен скуп у M_c. То значи да су орбите дејства (68) дисјунктни отворени подскупови. Ако је M_c повезана, одатле следи да постоји само једна орбита, тј. да је дејство транзитивно.

Нека је Σ_x стабилизатор тачке $x \in M_c$. Пошто је дејство (68) глатко, скуп Σ_x је дискретна подгрупа групе $(\mathbb{R}^n, +)$, тј.

$$\Sigma_x \cong \{m_1\mathbf{e}_1 + \ldots + m_k\mathbf{e}_n \mid m_1 \ldots, m_k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^k,$$

па је

$$M_c \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k \cong \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{T}^k.$$

Пошто је M_c компактна, следи да је $k = n$, тј. $M_c \cong \mathbb{T}^n$, чиме смо доказали ово тврђење из Арнолд–Лиувилове теореме. ◇

Задатак 39. Завршити доказ Арнолд–Лиувилове теореме на следећи начин. Нека је $x_0 \in M_c$ фиксирана тачка. Из транзитивности дејства (68) следи да за произвољну тачку $x \in M_c$ постоји $t_x \in \mathbb{R}^n$ такво да је $x = t_x \cdot x_0$. Доказати да су са

$$\theta(x) := t_x \pmod{()\mathbb{Z}^n} \in \mathbb{T}^n$$

добро дефинисане координате $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ на M_c које задовољавају последње тврђење Арнолд–Лиувилове теореме. ✓

Напомена 25. Подмногострукост L димензије n у $2n$–димензионој скоро комплексној многострукости (M, J) за коју важи (63), без захтева ортогоналности те суме (чак и без присуства природне метрике) је пример *тотално реалне подмногострукости.* Општије, подмногострукост L скоро комплексне многострукости (M, J) је *тотално реална* ако је $JTL \cap TL = \{0\}$. Ако је $\dim M = 2n$ и $L \subset M$ тотално реална подмногострукост, онда је $\dim L \leq n$.

Мала деформација тотално реалне подмногострукости је тотално реална подмногострукост (другим речима, „бити тотално реална подмногострукост” је отворено својство). Ово не важи за Лагранжеве подмногострукости: у фамилији дводимензионих подмногострукости

$$L_\varepsilon = \{(\theta_1, \theta_2, \varepsilon\theta_2, 0) \mid (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2\} \subset T^*\mathbb{T}^2$$

---

[17] Ако су X, Y аутономна векторска поља и ψ_t, ϕ_t њима генерисани токови, онда су следећи услови еквивалентни: (1) $[X, Y] = 0$; (2) $(\psi_t)_*Y = Y$; (3) $\psi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \psi_t$. Ово следи из дефиниције Лијевог извода $[X, Y] = L_X Y = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(\psi_{-t})_*Y$, уз мало диференцирања, нпр. $\frac{d}{dt}(\psi_t)_*Y = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}(\psi_{t-s})_*Y = (\psi_t)_*[X, Y]$ итд.

у котангентном раслојењу торуса, параметризованих параметром ε, само је L_0 Лагранжева, јер је $\omega\big|_{L_\varepsilon} = (d\theta_1 \wedge dp_1 + d\theta_2 \wedge dp_2)\big|_{L_\varepsilon} = \varepsilon d\theta_1 \wedge d\theta_2$. $\diamond$

Инфинитезималне деформације Лагранжеве подмногострукости L су параметризоване простором затворених 1–форми на L. Прецизније, нека је N глатка многострукост димензије n и (M,ω) симплектичка многострукост димензије $2n$. Нека је $\widehat{\mathcal{L}}(N,M)$ скуп свих Лагранжевих улагања $\iota : N \to M$. Група $\mathcal{G}$ дифеоморфизама $\phi : N \to N$ дејствује на $\widehat{\mathcal{L}}(N,M)$ по правилу $\iota \mapsto \iota \circ \phi$. Уколико желимо да посматрамо Лагранжеве подмногострукости као геометријске објекте, тј. само као слике $\iota(N) \subset M$, посматрамо их као тачке простора

$$\mathcal{L}(N,M) := \widehat{\mathcal{L}}(N,M)/\mathcal{G}.$$

Тангентни простор $T_L\mathcal{L}(N,M)$ у тачки L природно је идентификовати са простором затворених 1–форми на L, тј. дефинисати[18] са

$$T_L\mathcal{L}(N,M) = \{\nu \in \omega^1(L) \mid d\nu = 0\}. \tag{69}$$

Заиста, нека је $L_t\iota_t(N)$, за неко улагање $\iota_t : N \to M$, пут у $\mathcal{L}(N,M)$. Тада је $\iota_t^*\omega = 0$, па диференцирањем добијамо

$$d(\frac{d\iota_t}{dt} \lrcorner \omega) = 0.$$

Заиста, нека је, за неко $\iota_t : N \to M$, $L_t = \iota_t(N)$ пут у $\mathcal{L}(N,M)$, такав да је $L_0 = L$. Тада је $\iota_t^*\omega = 0$, па диференцирањем добијамо

$$d\Big(\frac{d\iota_t}{dt} \lrcorner \omega\Big) = 0.$$

Затворену форму $\frac{d\iota_t}{dt}\big|_{t=0} \lrcorner \omega$ идентификујемо са тангентним вектором $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} L_t$.

Пошто је $\iota_t : N \to L_t$ дифеоморфизам, сваку форму на N можемо да идентификујемо са формом на L_t, што ћемо и да радимо, користећи исту ознаку. Тако, кад говоримо о форми ν као тангентном вектору на пут L_t Лагранжевих подмногострукости у тачки L_0, можемо да је сматрамо формом из $\Omega^1(N)$ или $\Omega^1(L_0)$. Слично, тангентно векторско поље на пут L_t може да се посматра као фамилија форми $\nu_t \in \Omega^1(N)$ или $\nu_t \in \Omega^1(L_t)$.

Нека је

$$\mathcal{H}_L := \{\nu \in \omega^1(L) \mid \nu = dh\} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{H} := \bigcup_{L \in \mathcal{L}(N,M)} \mathcal{H}_L.$$

Тада је $\mathcal{H}$ подраслојење раслојења $T_L\mathcal{L}(N,M)$, тј. дистрибуција на $\mathcal{L}(N,M)$. Интегралне криве те дистрибуције кроз $L \in \mathcal{L}(N,M)$ су деформације L_t Лагранжеве подмногострукости $L = L_0$, такве да је $\frac{d}{dt}L_t$ (уз претходну идентификацију са формама) тачна форма.

Дефиниција 30. Интегралне криве дистрибуције $\mathcal{H}$ називамо *тачним Лагранжевим деформацијама.* $\diamondsuit$

[18] Тангентни простор у тачки бесконачне димензионе многострукости може да се дефинише, по аналогији са коначно димензионим случајем, као класа еквиваленције свих путева који имају тачку додира реда већег од 1, у случају $\mathcal{L}(N,M)$ из те дефиниције следи (69). Да се не бисмо дуже задржавали на опису топологије и структуре многострукости на $\mathcal{L}(N,M)$, сматраћемо (69) дефиницијом, а редове који следе мотивацијом која оправдава такву дефиницију.

Теорема 13. *Нека је* (M,ω) *симплектичка многострукост димензије* $2n$ *и* N *компактна многострукост димензије* n. *Крива* $L_t\in\mathcal{L}(N,M)$ *је тачна Лагранжева деформација ако и само ако постоји пут Хамилтонових дифеоморфизама* $\psi_t : M\to M$ *такав да је* $L_t=\psi_t(L_0)$.

$\triangle$ ($\Leftarrow$) Нека је ψ_t^H Хамилтонов пут генерисан Хамилтонијаном H_t, X_H одговарајуће Хамилтоново векторско поље и

$$\iota_t(N)=L_t=\psi_t^H(L_0)$$

пут чије је тангентно векторско поље

$$\nu_t=\frac{d\iota}{dt}\lrcorner\omega.$$

Тада је, за свако $x\in N$,

$$\frac{d\iota_t}{dt}(x)\lrcorner\omega=X_H(\iota_t(x))\lrcorner\omega=dH_t(\iota_t(x)),$$

па је $\iota_t^*\nu_t=dh_t$, где је

$$h_t:N\to\mathbb{R},\qquad h_t=H_t\circ\iota_t.$$

Тиме је доказано да је ν_t тачна форма, тј. $\nu_t\in\mathcal{H}$.

($\Rightarrow$) Нека је $L_t=\iota_t(N)$ интегрална крива дистрибуције $\mathcal{H}$. Њено тангентно векторско поље можемо да идентификујемо са фамилијом тачних форми $\nu_t\in\Omega^1(N)$. Тада постоји фамилија функција $h_t\in C^\infty(N)$, таква да је $dh_t=\nu_t$. Конструисаћемо Хамилтонијан $H\in C^\infty(M)$, такав да је $H_t\circ\iota_t=h_t$; тражена Хамилтонова деформација ψ_t биће генерисана њиме. То ћемо да постигнемо тако што ћемо h_t да продужимо на неку околину скупа L_t, пазећи да добијени Хамилтонијан остварује деформацију L_t.

Нека је J скоро комплексна структура сагласна са ω. За свако t многострукост L_t је Лагранжева, па је нормално раслојење $\nu L_t\cong JTL_t$. Пошто је N компактна многострукост, за довољно мало $\varepsilon>0$ пресликавање

$$TL_t : M,\qquad X_p\mapsto \exp_p(J_pX_p)\qquad \text{за}\qquad X_p\in T_pL_t$$

за све $t\in[0,1]$ дифеоморфизам неке околине нултог сечења $L_t\cong 0_{L_t}\subset TL_t$ на отворену околину

$$U_t=\{\exp_p(J_pX_p)\mid p\in L_t,\ X_p\in T_pL_t,\ \|X_p\|<\varepsilon\}\subset M$$

подмногострукости L_t. Нека је $\chi:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ глатка функција, таква да је

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x<\varepsilon/3\\ 0, & x>2\varepsilon/3.\end{cases}$$

Дефинишимо функцију $H_t:M\to\mathbb{R}$ са

$$H_t(\exp_p(JX_p))=\begin{cases}\chi(\|X_p\|)h_t\circ\iota_t^{-1}(p), & p\in L_t, X_p\in T_pL_t, \|X_p\|<\varepsilon\\ 0, & p\in M\setminus U_t.\end{cases}$$

За њу важи

$$H_t\circ\iota_t=h_t\qquad\text{и}\qquad d(H_t\big|_{L_t})=dh_t.$$

Према доказаном делу теореме, Хамилтонова деформација дефинисана Хамилтонијаном H_t остварује деформацију чије је тангентно векторско поље $\nu_t=\iota^*dh_t$, а то је управо деформација L_t. $\triangledown$

Последица 9. *Фамилија Лагранжевих улагања* $\iota_t : N \to L$, $L_t = \iota_t(M)$ *је тачна Лагранжева деформација ако и само ако је*

$$\frac{d\iota_t}{dt} \lrcorner \omega \in \Omega^1(L_t)$$

тачна форма за свако t.

Напомена 26. Аналогија Теореме 13 не важи за произвољне криве у $\mathcal{L}(N,M)$. Ако је $L \subset \mathcal{L}(N,M)$ Лагранжева подмногострукости и ψ_t пут у $\mathrm{Symp}(M)$, онда је, наравно, $L_t := \psi_t(L)$ пут у $\mathcal{L}(N,M)$, али не важи и обрнуто: не може сваки пут у $\mathcal{L}(N,M)$ да се реализује амбијентном симплектичком деформацијом. ◇

Задатак 40. Нека је M тачна симплектичка многострукост и L_t глатка фамилија тачних Лагранжевих подмногострукости. Доказати да је L_t тачна Лагранжева деформација. Упоредити то са Лемом 7 на стр. 134. ✓

2.7. Симплектичка редукција. Приликом извођења Кеплерових закона (Задатак 22) присуство симетрије система нам је омогућило да тродимензиони проблем сведемо на дводимензиони, а затим и на једнодимензиони. Ово је пример редукције система који је инваријантан у односу на дејство Лијеве групе – централно поље је инваријантно у односу на дејство групе изометријских трансформација које фиксирају координатни почетак.

Кеплерови закони нам дају пример редукције у присуству симетрије алгебарског типа, тј. дејства групе у односу на коју је систем инваријантан. Други пример редукције система на систем ниже димензије видели смо у Арнолд–Лиувиловој теореми: присуство n првих интеграла у инволуцији (које, као константе Хамилтоновог кретања, такође можемо да сматрамо симетријама система) омогућава нам да интеграцију система на $2n$–димензионој симплектичкој многострукости сведемо на интеграцију на инваријантним Лагранжевим торусима димензије n. Ова редукција је геометријског типа; Хамилтонова векторска поља интеграла у инволуцији дефинишу тангентно раслојење инваријантног Лагранжевог торуса на који се систем редукује

Идеја геометријске редукције система диференцијалних једначина, која потиче од Е. Картана и С. Лија, може да се опише, без већег задржавања на детаљима, на следећи начин. Нека је N глатка многострукост и β затворена 2–форма на N. Нека је

$$E_p^\beta := \{X_p \in T_pN \mid (\forall Y_p \in T_pN) \mid \beta(X_p, Y_p) = 0\} \qquad \text{и} \qquad E^\beta := \bigcup_{p \in N} E_p^\beta.$$

Кажемо да је форма β *регуларна* ако $\dim E_p^\beta$ иста за све p; из Дарбуове и Пфафове теореме (видети стр. 26) следи да је то случај када је форма β константног ранга. Може да се покаже да је у том случају E^β векторско раслојење. Из

$$L_X = i_X \circ d + d \circ i_X \qquad \text{и} \qquad i_{[X,Y]} = L_X \circ i_Y - i_Y \circ L_X$$

следи да је регуларна дистрибуција интеграбилна. Њене интегралне подмногострукости дефинишу *разлиставање* или *фолијацију* $\mathcal{F}$ многострукости M.

Дефиниција 31. *Разлиставање* (или *фолијација*) $\mathcal{F} = \{F_a \mid a \in A\}$ димензије k на n–димензионој многострукости M је колекција дисјунктних повезаних подскупова F_a, таква да је

$$M = \bigcup_{a\in A} F_a$$

и да свака тачка на M има координатну околину U са локалним координатама $(x_1, \dots, x_n)$ у којима је за све $a \in A$

$$U \cap F_a = \{x_1 = c_1(a), \dots, x_{n-k} = c_{n-k}(a)\}$$

за неке константе $c_j(a)$. Скупови F_a, који су, локално, k–димензионе подмногострукости се називају *листовима* фолијације. $\Diamond$

Ако идентификујемо тачке које се налазе у истом листу, добијамо количнички простор $M/\mathcal{F}$. Ако је $M/\mathcal{F}$ многострукост и $\pi : M \to M/\mathcal{F}$ субмерзија, може да се докаже да форма β индукује симплектичку структуру на $M/\mathcal{F}$.

Ми ћемо да размотримо само један специјални случај ове конструкције.

Нека је (M, ω) симплектичка многострукост и N њена подмногострукост. Са $(T_pN)^\omega$ означавамо *симплектички ортогонални комплемент* њеног тангентног простора T_pN, тј.

$$(T_pN)^\omega = \{X_p \in T_pM \mid (\forall Y_p \in T_pN)\, \omega(X_p, Y_p) = 0\}.$$

Тада је

$$(TN)^\omega := \bigcup_{p\in N} (T_pN)^\omega$$

векторско раслојење над N.

Из општих својстава β–ортогоналног комплемента за недегенерисану билинеарну форму β (видети (2) на стр. 121) следи

$$\operatorname{rang}(TN)^\omega + \dim N = \dim M. \tag{70}$$

Дефиниција 32. Подмногострукост $N \subset M$ симплектичке многострукости (M, ω) назива се

(1) *изотропном* ако је $TN \subset (TN)^\omega$;
(2) *коизотропном* ако је $(TN)^\omega \subset TN$.

Другим речима, подмногострукост N је изотропна ако је $\omega\big|_{TN} = 0$, а коизотропна ако из $(X \lrcorner \omega)\big|_{TN} = 0$ следи да је X тангентно на N. $\Diamond$

Ако је $\dim M = 2n$ и $N \subset M$ изотропна подмногострукост, из (70) следи да је $\dim N \le n$. Ако је N коизотропна, онда је $\dim N \ge n$.

Пример 33. Свака глатка крива на симплектичкој многострукости је изотропна, а свака хиперповрш коизотропна подмногострукост. $\sharp$

Пример 34. Нека је M произвољна глатка многострукости и N њена подмногострукост. Тада је T_N^*M коизотропна подмногострукост симплектичке многострукости T^*M. Она је Лагранжева ако и само ако је $\dim N = 0$. $\sharp$

Задатак 41. Доказати да је подмногострукост Лагранжева ако и само ако је и изотропна и коизотропна. ✓

Теорема 14. *Нека је N коизотропна подмногострукост симплектичке многострукости (M, ω). Тада је дистрибуција $(TN)^\omega$ на N интеграбилна.*

△ Нека су $X, Y : N \to (TN)^\omega$ два векторска поља дистрибуције $(TN)^\omega$. Тада је

$$\omega(X, Z) = 0 \qquad \text{и} \qquad \omega(Y, Z) = 0$$

за свако векторско поље $Z : N \to TN$. Одатле и из Леме 2 на стр. 24 следи да је

$$d\omega(X, Y, Z) = \omega([X, Y], Z).$$

Пошто је форма ω затворена, одатле следи да је $\omega([X, Y], Z) = 0$ за сва векторска поља Z у TN, па је $[X, Y] \in (TN)^\omega$. Из Фробенијусове теореме следи да је дистрибуција $(TN)^\omega$ интеграбилна. ▽

Из Теореме 14 следи да дистрибуција $(TN)^\omega$ на N има интегралне подмногострукости. Максималне интегралне подмногострукости (у односу на инклузију) те дистрибуције дефинишу фолијацију $\mathcal{F}$. Количнички простор $N/\mathcal{F}$ релације еквиваленције

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; (\exists F \in \mathcal{F})\, x, y \in F,$$

у општем случају, није многострукост. Ако претпоставимо да јесте и да је канонска пројекција

$$\pi : N \to N/\mathcal{F}$$

субмерзија, онда важи следећа теорема.

Теорема 15. *Тангентно раслојење $T(N/\mathcal{F})$ може да се идентификује са раслојењем $TN/(TN)^\omega$. Форма ω индукује недегенерисану затворену форму на том раслојењу, па је $N/\mathcal{F}$ симплектичка многострукост.*

△ Ако је векторско поље X тангентно на лист F фолијације $\mathcal{F}$, онда је

$$L_X\omega = X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega) = 0$$

(први сабирак је једнак нули због затворености симплектичке форме, а други због $X \lrcorner \omega = 0$ за X из дистрибуције $(TN)^\omega$). Одатле следи да је форма ω константна на сваком листу F, па дефинише форму $\omega_{\mathcal{F}}$ на $N/\mathcal{F}$, која задовољава

$$\iota^*\omega = \pi^*\omega_{\mathcal{F}}$$

где је $\iota : N \to M$ инклузија. Одатле следи да је $\omega_{\mathcal{F}}$ симплектичка форма на $M/\mathcal{F}$. ▽

Дефиниција 33. Симплектичка многострукост $N/\mathcal{F}$ назива се *симплектичком редукцијом* коизотропне подмногострукости N симплектичке многострукости M. ◊

Задатак 42. Доказати да је симплектичка редукција коизотропне многострукости T_N^*M симплектичке многострукости T^*M симплектоморфна симплектичкој многострукости T^*N. ✓

Лагранжеве подмногострукости се, уз извесне претпоставке, при симплектичкој редукцији пресликавају у Лагранжеве, у општем случају, имерзије. Да бисмо то прецизно формулисали, потребна нам је следећа дефиниција.

Дефиниција 34. Подмногострукости $L, N \subset M$ се секу *чисто* ако је њихов пресек $L \cap N$ подмногострукост и

$$T_p(L \cap N) = T_pL \cap T_pN$$

за све $p \in L \cap N$. ◊

Тврђење 12. *Нека је (M,ω) симплектичка многострукост $N \subset M$ њена коизотропна подмногострукост и $L \subset M$ Лагранжева подмногострукост која се чисто сече са N. Ако је $N/\mathcal{F}$ многострукост добијена симплектичком редукцијом подмногострукости N и*

$$\pi : N \to N/\mathcal{F}$$

субмерзија, онда је $L_N := \pi(L \cap N)$ Лагранжева имерзија.

$\triangle$ Доказ да је L_N имерзија остављамо читаоцу; докажимо да је она Лагранжева. Тангентни простор на L_N је

$$T_pL_N = (T_pL \cap T_pN) + (T_pN)^\omega,$$

па је $(T_pL_N)^\omega = T_pL_N$ (видети Задатак1 на стр. 121). Одатле следи да је многострукост L_N Лагранжева. $\triangledown$

Специјални случај (геометријски дефинисане) симплектичке редукције коизотропне подмногострукости је следећа, тзв. Марсден–Вејнстејнова, редукција, алгебарске природе. Претпоставимо да је задато Хамилтоново дејство Лијеве групе G на симплектичкој многострукости M, са моментним пресликавањем

$$\mu : M \to \mathfrak{g}^*$$

(видети Пример 19 на стр. 154).

Теорема 16. *Ако је Хамилтоново дејство Лијеве групе G на симплектичкој многострукости M слободно и сопствено (тако да је M/G многострукост) и ако је $0 \in \mathfrak{g}^*$ регуларна вредност моментног пресликавања $\mu : G \to \mathfrak{g}^*$, онда је $N := \mu^{-1}(0)$ коизотропна подмногострукост у M. Она дефинише фолијацију $\mathcal{F}$ чији су листови орбите дејства групе G. Симплектичка редукција $N/\mathcal{F}$ се природно идентификује са количничким простором $\mu^{-1}(0)/G$; она је симплектичка многострукост димензије $\dim M - \dim G$.*

$\triangle$ Нека је $\mathcal{O}$ орбита тачке $p \in M$. Тада је $T_p\mathcal{O}(p) = \{\widehat{\eta}_p \mid \eta \in \mathfrak{g}\}$, где је $\widehat{\eta}$ фундаментално векторско поље на M придружено вектору $\eta \in \mathfrak{g}$ (видети Дефиницију 34 на стр. 114).

Претпоставимо да је $\mu(p) = 0$. Тада је, за све $\eta \in \mathfrak{g}$,

$$H_\eta(p) = \langle \mu(p), \eta \rangle = 0.$$

где је H_η Хамилтонијан моментног пресликавања, уведен у Примеру 19. Одатле следи да је је H_η константан на $N = \mu^{-1}(0)$, па је за свако $X_p \in T_pN$

$$\omega(\widehat{\eta}, X_p) = dH_\eta(X_p) = 0.$$

Из тога закључујемо да је

$$T_p\mathcal{O}(p) \subset (T_pN)^\omega. \tag{71}$$

Пошто је

$$\dim T_p\mathcal{O}(p) = \dim \mathcal{O}(p) = \dim G = \operatorname{codim} N = \dim (T_pN)^\omega,$$

инклузија (71) је једнакост. Из закона одржања енергије следи $\mathcal{O}(p) \subset N$ па је $(T_pN)^\omega \subset T_pN$. Тиме је доказано да је N коизотропна подмногострукост. Постојање симплектичке структуре на количничком простору доказано је у Теореми 15. $\triangledown$

Дефиниција 35. Симплектичка многострукост $\mu^{-1}(0)/G$, која се обично означава са $M//G$, назива се *Марсден–Вејнстеновом редукцијом* симплектичке многострукости M у односу на Хамилтоново дејство групе G. $\Diamond$

Задатак 43. Хамилтонијан

$$H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}, \qquad H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k(p_k^2 + q_k^2),$$

где су $a_1, \ldots, a_n$ позитивни бројеви, описује механички систем познат као *хармонијски осцилатор.*

(а) Решити Хамилтонове једначине за овај систем.

(б) Наћи сва периодична решења на хиперповрши $H \equiv h > 0$.

(в) Доказати да за $a_1 = \ldots = a_n = 1$ овај систем дефинише дејство групе $\mathbb{S}^1$ на $\mathbb{S}^{2n-1}$ и да је простор орбита овог дејства $\mathbb{C}P^{n-1}$. ✓

3. Пројективна котангентна раслојења и џет раслојења

3.1. Пројективна котангентна раслојења. Термин *контактна структура* потиче од појма *контакнтих елемената* глатке многострукости.

Дефиниција 36. *Контактни елемент* многострукости M у тачки $p \in M$ је хиперраван у тангентном простору T_pM. Ако је $\Delta_p \subset T_p$ контактни елемент, тачка p се назива његовом *тачком контакта.* $\Diamond$

Ако је dim $M = n$, скуп свих контактних елемената у тачки p је Грасманова многострукост $G_{n-1}(T_pM)$. Из изоморфизма[19] $G_k(\mathbb{R}^n) \cong G_{n-k}((\mathbb{R}^n)^*)$ следи да је скуп свих контактних елемената у тачки p изоморфан простору $G_1(T_p^*M)$, односно пројективизацији $P(T_p^*M)$ котангентног простора у тачки p. Скуп свих контактних елемената на M је пројективно котангентно раслојење

$$\pi : PT^*M \to M$$

добијено од котангентног раслојења T^*M применом поступка пројективизације на влакнима. Пројективно котангентно раслојење је многострукост димензије $2n - 1$.

Идентификацију простора контактних елемената са пројективним котангентним раслојењем можемо да видимо и на следећи начин. Ако је $\Delta_p \in T_pM$ контактни елемент, њега можемо да дефинишемо тачком $\upsilon_p \in T_p^*M$, таквом да је

$$\Delta_p = \ker \upsilon_p. \tag{72}$$

Пошто је $\ker \upsilon_p = \ker t\upsilon_p$ за $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, све тачке праве l_p кроз нулу (осим нуле) у T_p^*M дефинишу исти контактни елемент, тако да се скуп контактних елемената у тачки p природно идентификује са скупом правих кроз нулу у простору T_p^*M, тј. са пројективизацијом тог простора.

Пројективно котангентно раслојење има природну контактну структуру, дефинисану на следећи начин. Тангентни вектор $X_{\Delta_p} \in T_{\Delta_p}(PT^*M)$ је *допустив* ако његова пројекција на тангентни простор у тачки контакта p припада контактном елементу Δ_p, тј. ако је

$$\pi_*(X_{\Delta_p}) \in \Delta_p. \tag{73}$$

[19] односно, из Принципа дуалности у пројективној геометрији.

Скуп свих допустивих вектора је хиперраван ξ_p у простору $T_{\Delta_p}(PT^*M)$; фамилија ових хиперравни дефинише контактну структуру ξ на PT^*M.

Да бисмо проверили услов максималне неинтеграбилности, искористићемо Лиувилову форму λ на котангентном раслојењу. Тачке влакна пројективног котангентног раслојења PT^*_pM су праве у T^*_pM кроз нулу, тако да Лиувилова форма у тачки $[l_p] \in PT^*_pM$ није добро дефинисана, али њено језгро јесте, јер је услов $\lambda = 0$ инваријантан у односу на вертикалну транслацију у T^*M. Нека је Δ_p контактни елемент у тачки $p \in M$ који је одређен тачком $\upsilon_p \in T^*_pM$ помоћу (72) и нека је l_p права кроз нулу у T^*_pM која садржи υ_p. Вектор

$$X_{\Delta_p} \in T_{\Delta_p}PT^*M = T_{l_p}PT^*M$$

испуњава услов (73) ако и само ако је $\upsilon_p(\pi_*(X_{\Delta_p})) = 0$, што је еквивалентно са $\pi_*(X_{\Delta_p}) \in \ker\lambda$. Одатле следи да је контактна структура ζ на PT^*M језгро Лиувилове форме λ, које има смисла и на $T(PT^*PM)$ иако сама форма λ није на том простору добро дефинисана.

Лиувилова форма λ у локалним координатама на T^*M има запис

$$\lambda = p_1dq_1 + \ldots + p_ndq_n.$$

Ако су $(q_1, \ldots, q_n, [p_1 : \ldots : p_n]$ одговарајуће хомогене координате на PT^*M, онда, у карти у којој је $p_n \neq 0$, Лиувиловој форми одговара форма

$$\alpha = dq_n - \sum_{j=1}^{n-1} \bar{p}_j\, dq_j,$$

гфе је $\bar{p}_j = -p_j/p_n$. Форма α је стандардна контактна форма на $\mathbb{R}^{2n+1}$ коју смо већ сусрели у Примеру 2 на стр. 125. Тиме смо показали да је ξ заиста контактна структура на PT^*M.

Пример 35. Торус $\mathbb{T}^n$ има тривијално котангентно раслојење, па је

$$PT^*\mathbf{T}^n = \mathbf{T}^n \times \mathbb{R}P^{n-1}.$$

Ова многострукост је неоријентабилна ако је n непаран број. Приметимо да је контактна многосрукост M оријентабилна ако њена контактна структура може да буде задата глобално дефинисаном контактном формом α, јер је у том случају $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge \dim M}$ форма запремине.

Специјално, ако је $n = 2$, онда је пројективно котангентно раслојење

$$PT^*\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}^2 \times \mathbb{R}P^1$$

је дифеоморфно тродимензионом торусу. Контактна структура на њему је дата са

$$\sin\theta\, dx - \cos\theta\, dy = 0, \tag{74}$$

где су (x, y) координате на $\mathbf{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, а θ координата на $\mathbb{R}P^1 \cong \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. Приметимо да при оваквој идентификацији $\mathbb{R}P^1$ са кругом десна страна у (74) није добро дефинисана форма, па контактна структура дефинисана том једначином није коориjентабилна (сетимо се да кооријентабилним контактним структурама називамо оне које су дефинисане глобално задатом контактном формом). Форма на десној страни у (74) јесте добро дефинисана форма на торусу $\mathbf{T}^3 \cong \mathbf{T}^2 \times \mathbb{S}^1$ са идентификацијом $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Другим речима, ако посматрамо dволисно наткривање

$$\pi : \mathbf{T}^3 \to \mathbf{T}^3$$

дефинисано помоћу дволисног наткривања $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ [20], коориjентабилна контактна структура на тоталном простору добиjа се као подизање некоориjентабилне контактне структуре на бази. $\sharp$

Следећи задатак треба упоредити са Примером 10 на стр. 134.

Задатак 44. Нека jе M глатка многострукост и $N \subset M$ подмногострукост.

(а) Доказати да jе скуп L контактних елемената у на многострукости M тангентних на подмногострукост N интегрална подмногострукост контактне структуре ξ.

(б) Доказати да jе

$$\dim L = \dim M - 1,$$

без обзира на димензиjу N, тако да jе та многострукост Лежандрова у PT^*M (видети Дефинициjу 5 на стр. 125).

(в) Ако jе N хиперповрш, доказати да jе $L \cong N$. ✓

Задатак 45. (Сферна котангентна раслоjења) Нека jе на T^*M дата метрика на влакнима. Раслоjење

$$ST^*M := \bigcup_{p\in M} \{v_p \in T_p^*M \mid \|v\| = 1\},$$

чиjа су влакна сфере $\mathbb{S}^{n-1}$, назива се *сферним раслоjењем* раслоjења T^*M. Доказати да дволисно наткривање

$$\pi : ST^*M \to PT^*M$$

дефинише контактну структуру на ST^*M, коjа може да се идентификуjе са простором *ориjентисаних контакнтих елемената* на M, тj. парова (Δ_p, o_p), где jе $\Delta_p \subset T_pM$ контактни елемент, а o_p његова ориjентациjа (тj. избор ориjентисане базе векторског простора Δ_p). ✓

3.2. Џет раслоjења. У Глави 0 смо видели како диференциjалне jедначине можемо да посматрамо из дуалне перспективе (видети пример 5 на стр. 25). Задржимо се на jедначинама првог реда. Претпоставимо да тражимо функциjу $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ коjа задовољава систем парциjалних jедначина првог реда

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1(x_1, \ldots, x_n, z), \qquad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n(x_1, \ldots, x_n, z). \tag{75}$$

Дефинишимо у простору $\mathbb{R}^{n+1}$, са координатама $(x_1, \ldots, x_n, z)$, диференциjалне форме

$$\alpha := dz - \sum_{j=1}^{n} p_j\, dx_j \qquad \text{и} \qquad \Omega := dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \tag{76}$$

Решавање система (75) jе еквивалентно налажењу хиперповрши $\iota : \Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}$, такве да jе

$$\iota^*\alpha = 0, \qquad \text{и} \qquad \iota^*\Omega \neq 0$$

(други услов нам обезбеђуjе да $\iota(\Sigma)$ буде график функциjе по $(x_1, \ldots, x_n)$).

Посматраjмо сада ову геометризациjу jедначине (75) мало флексибилниjе. Претпоставимо за тренутак да $p_1, \ldots, p_n$ у (76) нису функциjе, него независне

[20] Специjални случаj наткривања $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$ за $n = 1$.

промењљиве. Тада је α контактна форма у $\mathbb{R}^{2n+1}$. Посматрајмо, уместо система (75), нелинеарну једначину првог реда

$$F\left(x_1,\dots,x_n,z,\frac{\partial z}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0, \tag{77}$$

где је

$$F:\mathbb{R}^{2n+1}\to\mathbb{R},\qquad (x_1,\dots,x_n,z,p_1\dots,p_n)\mapsto F(x_1,\dots,x_n,z,p_1\dots,p_n)$$

глатка функција. Претпоставићемо да је $\frac{\partial F}{\partial p_j}\neq 0$ за неко j, да бисмо могли, на основу Теореме о имплицитној функцији, да закључимо да је, уз ознаке $x=(x_1,\dots,x_n)$ и $p=(p_1,\dots,p_n)$,

$$S:=\{(x,z,p)\in\mathbb{R}^{2n+1}\mid F(x,z,p)=0\}$$

глатка подмногострукост и да је пројекција

$$\pi:S\to\mathbb{R}^{n+1},\qquad (x,z,p)\mapsto(x,z)$$

глатка субмерзија. Нека је $\iota:S\to\mathbb{R}^{2n+1}$ инклузија и $\alpha\big|_S$ рестрикција контактне форме на S:

$$\alpha\big|_S=\iota^*\alpha,\qquad \alpha=dz-\sum_{j=1}^n p_j dx_j.$$

Решавање једначине (77) је еквивалентно налажењу интегралних подмногострукости дистрибуције $\ker\alpha\big|_S$ на S. Те подмногострукости су облика

$$\{(x,f(x),Df(x))\mid x\in U\subset\mathbb{R}^n\}\subset S.$$

Израз $j^1_x f:=(x,f(x),Df(x))$ назива се *1–џетом* функције f у тачки x. Ако је $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, онда је дефинисано и пресликавање

$$j^1 f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{2n+1},\qquad x\mapsto j^1_x f.$$

Решење $z=f(x_1,\dots,x_n)$ једначине (77) је функција $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, таква да је $j^1 f(\mathbb{R}^n)\subset S$.

Векторско поље

$$Z=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial x_j}+p_j\frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial z}-\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}+p_j\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial p_j}\right) \tag{78}$$

задовољава услове

$$\alpha(Z)=0\qquad\text{и}\qquad dF(Z)=0,$$

одакле следи да је оно тангентно на површ која дефинише решење једначине (77). Векторско поље (78) назива се *карактеристичним векторским пољем* или *Кошијевом карактеристиком.*

Претпоставимо да тражимо решење $z=f(x_1,\dots,x_n)$ једначине (77) задато граничним условом $f\big|_X=\phi$, за неку хиперповрш $C_0\subset\mathbb{R}^n$ и неку глатку функцију $\phi:C_0\to\mathbb{R}$ (нпр. $f(t_1,\dots,t_{n-1},0)=\phi(t_1,\dots,t_{n-1})$ у неким координатама $(t_1,\dots,t_n)$ на $\mathbb{R}^n$). Тим граничним условима су задати и изводи функције f у правцу вектора тангентних на C_0 (парцијални изводи по промењљивим $t_1,\dots,t_{n-1}$ у споменутим координатама). Претпоставимо да извод у преосталом, трансверзалном на C_0, правцу (извод по t_n) можемо да нађемо из једначине (77), помоћу теореме о имплицитној функцији примењене на функцију F. Тада рестрикција функције f и њених извода на хиперповрш C_0 дефинише површ $C=j^1f(C_0)$ димензије $n-1$ у S. Ако претпоставимо да је ова površ трансверзална на векторско поље Z, површ $j^1f(\mathbb{R}^n)\subset S$ је, бар локално, унија интегралних кривих поља Z које полазе из тачака подмногострукости C. Тиме смо решавање парцијалне једначине (77) свели на решавање система обичних диференцијалних једначина – интегралних кривих векторског поља Z. Овај метод решавања нелинеарних парцијалних једначина првог реда познат је као *метод карактеристика*.

Размотримо сада све ово без координата. У општем случају, појам 1–џета функције даје следећа дефиниција.

Дефиниција 37. Нека је M глатка многострукост. Нека је $x\in M$ и $C^\infty(x)$ скуп класа еквиваленција функција глатких у околини тачке x (две функције су еквивалентне ако се поклапају у некој околини тачке x; видети стр. 4). Уведимо на $C^\infty(x)$ нову релацију еквиваленције, $\sim_1$, са

$$f\sim_1 g \quad\Leftrightarrow\quad f(x)=g(x) \text{ и } df(x)=dg(x).$$

Класу еквиваленције функције f у односу на релацију $\sim_1$ означавамо са $j^1_x(f)$ и називамо *1–џетом функције* f у тачки x. Скуп свих 1–џетова глатких функција $f:M\to\mathbb{R}$,

$$J^1(M,\mathbb{R}):=\{j^1_xf\mid x\in M,\ f\in C^\infty(M)\}$$

називамо *раслојењем 1–џетова*. $\Diamond$

Скуп 1–џетова $J^1(M,\mathbb{R})$ је векторско раслојење над M; није тешко видети да је

$$J^1(M,\mathbb{R})\cong T^*M\times\mathbb{R}. \tag{79}$$

Специјално, за $M=\mathbb{R}^n$ добијамо $J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{2n+1}$.

Напомена 27. Нека је

$$\pi:E\to M \tag{80}$$

глатко раслојење. Дефинисемо релацију еквиваленције $\sim_k$ на простору сечења овог раслојења на следећи начин. Нека су $s_1,s_2:U\to E$ два сечења, дефинисана у некој околини U тачке $x\in M$. Дефинишимо релацију

$$s_1\sim_k s_2 \quad\Leftrightarrow\quad D^\alpha s_1=D^\alpha s_2 \ \text{ за }\ 0\le|\alpha|\le k,$$

где је

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}},\qquad \text{за}\qquad \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n,\ |\alpha|:=\alpha_1+\dots+\alpha_n,$$

парцијални извод реда $|\alpha|$ у координатним картама које садрже тачку x, и $s_1(x)=s_2(x)$. Лако се види да ова дефиниција не зависи од избора координата, па је њоме добро дефинисана релација еквиваленције на скупу глатких сечења, дефинисаних у околини тачке x. Класу еквиваленције сечења s означавамо са j^k_xs и називамо *k–џетом* сечења s у тачки x. Скуп свих k–џетова сечења раслојења (80) означавамо са J^kE и називамо *раслојењем k–џетова* (у општем случају, ово раслојење није векторско). Свако сечење $s:M\to E$ дефинише сечење

$$j^ks:M\to J^kE,\qquad x\mapsto j^k_xs.$$

Подскуп $R\subset J^kE$ називамо *парцијалном диференцијалном релацијом* реда k, а сечење $s:M\to E$, такво да је $j^ks(M)\subset R$ њеним решењем. Парцијалне диференцијалне једначине су специјални случај парцијалних диференцијалних релација у којима је скуп R дефинисан неком једначином.

Осим пројекције $\pi : J^kE \to M$ која снабдева J^1E структуром раслојења над M, постоји природна пројекција

$$\pi^k_{k-1} : J^kE \to J^{k-1}E, \tag{81}$$

која „заборавља” k–ти извод. Она снабдева J^kE структуром афиног раслојења[21] над $J^{k-1}E$.

Специјално, за $k = 1$, раслојење $\pi : J^1E \to M$ се састоји од класа еквиваленције сечења, у односу на релацију еквиваленције дефинисану условом тангентног додира. Другим речима, 1–џет $j^1_x s$ може да се идентификује са тангентним простором $s_*(T_xM) \subset T_{s(x)}E$. То значи да раслојење J^1E може да се идентификује са скупом свих потпростора $H_e \subset T_eE$ трансверзалних на вертикални простор $V_e = \ker \pi_*(e) \subset T_eE$. Другим речима, сечења раслојења (81), тј. раслојења

$$\pi^1_0 : J^1E \to J^0E \tag{82}$$

које „заборавља изводе”, могу да се идентфикују са конексијама на E.

Ако је $E = M \times F$ тривијално раслојење, његова сечења можемо да идентификујемо са пресликавањима $f : M \to F$; у том случају говоримо о џетовима пресликавања из M у F и пишемо $J^k(M, F)$ уместо J^kE. Ако је $k = 1$, идентификација простора J^1E са хоризонталним равнима у TE и изоморфизам $TE \cong TM \times TF$ снабдевају $J^1(M, F)$ структуром раслојења над $T(B \times F)$ чије је влакно над тачком $x \in B$ скуп хоризонталних равни над x. Свака раван која је трансверзална на вертикалну може да се швати као график линеарног пресликавања, па имамо раслојење

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}\,(T_xM, T_yF) & \to & J^1(M, F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, y) & \in & M \times F. \end{array}$$

Два специјална случаја су $M = \mathbb{R}$ и $F = \mathbb{R}$, тј.

$$J^1(\mathbb{R}, F) \cong \mathbb{R} \times TF \qquad \text{и} \qquad J^1(M, \mathbb{R}) \cong T^*M \times \mathbb{R}.$$

Ми ћемо се детаљније задржати само на последњем раслојењу, због присуства природне контактне структуре на њему. $\diamond$

Ако је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција, онда је

$$j^1f : M \to J^1(M, \mathbb{R}), \qquad p \mapsto j^1_p f$$

сечење раслојења 1–џетова. Унија тангентних простора на слике $j^1f(M)$ свих оваквих сечења дефинише контантну структуру на многострукости $J^1(M, \mathbb{R})$. Ова контактна структура задата је контактном формом

$$\alpha = dz - \lambda,$$

[21] У локалним координатама, сечење можемо да напишемо као $s(x) = (x, f(x))$, а k–џет функције $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, где је $n = \dim M$ и $m + n = \dim E$, можемо да представимо са $j^k_x f = (f(x), f'(x), \ldots, f^{(k)}(x)$. Одатле видимо да скуп $\pi^k_{k-1}(c)$ можемо да поистоветимо да простором $\mathbb{R}^{r(n+k-1)!/(n-1)!k!}$. Ова идентификација није канонска, тј. ако је $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ репараметризација влакна, извод $D^k(f \circ \psi)$ укључује све изводе реда $\leq k$. Одатле следи да не постоји канонска тривијализација раслојења (81) која је линеарна на свим влакнима, па то раслојење нема векторску, него само афину структуру. Из истог разлога, не можемо да говоримо о инклузији $J^{k-1}E \subset J^kE$, већ само о пројекцији (81).

на (79), где је λ Лиувилова форма на T^*M и dz тачна форма на $\mathbb{R}$. У локалним координатама, Лиувилова форма је $\lambda = p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n$, па је

$$\alpha = dz - p_1 dq_1 + \ldots + p_n dq_n$$

локални запис контактне форме на $J^1(M, \mathbb{R})$. Специјално, за $M = \mathbb{R}^n$ раслојење $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ је контактна многострукост $\mathbb{R}^{2n+1}$ са стандардном конктактном формом (Пример 2 на стр. 125).

Претпоставимо да је $S \subset J^1(M, \mathbb{R})$ хиперповрш, трансверзална на контактну структуру ξ у тачки p (тј. ξ_p је трансверзално на T_pS). Тада је

$$\operatorname{codim}(T_pS \cap \xi_p) = \operatorname{codim} T_pS + \operatorname{codim} \xi_p = 1 + 1 = 2,$$

(видети Теорему 4 на стр. 10), односно $\dim(T_pS \cap \xi_p) = 2n - 2 = \dim \xi_p - 1$, па је $\xi_p \cap T_pS$ хиперраван у ξ_p. Ако је α контактна форма која дефинише ξ, из услова неинтеграбилности $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} \neq 0$ следи да је $d\alpha$ недегенерисана билинеарна форма на ξ.

Дефиниција 38. *Карактеристично векторско поље* на хиперповрши S је векторско поље $Z : S \to \xi$, такво да је[22]

$$Z_p \in (\xi_p \cap T_pS)^{d\alpha}$$

за свако $p \in S$. Интегралне криве карактеристичног векторског поља називамо *карактеристичним кривама.* $\Diamond$

Пошто је $\xi_p \cap T_pS$ хиперпростор у простору ξ_p, следи да је $(\xi_p \cap T_pS)^{d\alpha} \subset \xi_p \cap T_pS$, па је карактеристично векторско поље тангентно на S (а самим тим, карактеристичне криве леже у S).

Карактеристично поље је јединствено до на мултипликативну константу, па дефинише јединствено поље *карактеристичних правих* на тангентном раслојењу, тј. подраслојење ранга 1 у TS.

Задатак 46. Користећи чињеницу да је контактна форма α јединствена до на множење функцијом различитом од нуле, доказати да претходна дефиниција не зависи од избора контактне форме. ✓

Задатак 47. Нека је Z карактеристично поље на хиперповрши S и α контактна форма. Доказати да је на TS

$$Z \lrcorner d\alpha = f\alpha \tag{83}$$

за неку глатку функцију f која је свуда различита од нуле. ✓

Задатак 48. Нека је хиперповрш задата једначином $F(x) = 0$. Доказати да је карактеристично векторско Z поље дефинисано условима

$$\alpha(Z) = 0 \qquad \text{и} \qquad Z \lrcorner d\alpha(X) = dF(X)$$

за свако поље X са вредностима у ξ. Доказати затим да је векторско поље (78) заиста карактеристично векторско поље у смислу Дефиниције 38. ✓

Формулишимо сада метод карактеристика, о коме смо говорили раније, на инваријантан начин, без координата.

---

[22]Подсетимо се да смо са W^β означавали β–ортогонални комплемент потпростора W; видети стр. 121. Простор $(\xi_p \cap T_pS)^{d\alpha}$ је $d\alpha$–ортогонални комплемент потпростора $\xi_p \cap T_pS$ у простору ξ_p.

Теорема 17. *Нека је S хиперповрш у $J^1(M,\mathbb{R})$ и нека је $C \subset S$ подмногострукост димензије $n-1$, таква да је $TC \subset \xi$. Ако је у тачки $x \in C$ карактеристична права $l \subset T_xS$ трансверзална на T_xC, онда је унија карактеристичних кривих у околини тачке x Лежандрова подмногострукост у $J^1(M,\mathbb{R})$.*

$\triangle$ Нека је ψ_t фамилија дифеоморфизама генерисана карактеристичним векторским пољем Z; ова фамилија је дефинисана локално, у некој околини U тачке x и за $|t| < \varepsilon$. Треба да докажемо да је $L := \{\psi_t(x) \mid x \in C \cap U,\ |t| < \varepsilon\}$ Лезандрова подмногострукост. Пошто је трансверзалност отворено својство, можемо да претпоставимо (смањујући скуп U ако је потребно), да је су карактеристичне праве трансверзалне на C у свакој тачки из $U \cap C$. Одатле следи да је L многострукост димензије n. Сваки вектор из $X_p \in T_pL$ може да се разложи на збир

$$X_p = aZ_p + (\psi_t)_*Y, \tag{84}$$

где је Z_p карактеристичи вектор и $Y \in T_{\psi_t^{-1}(p)}C$. Из чињенице да је Z карактеристично поље следи да је

$$\alpha(X_p) = \psi_t^*\alpha(Y).$$

Из Картанове формуле и $\alpha(Z) = 0$ следи

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\alpha(Y) = \psi_t^*(Z \lrcorner d\alpha) = (f \circ \psi_t)\psi_t^*\alpha, \tag{85}$$

где је f функција из (83). Пошто је $TC \subset \xi$ и Y тангентни вектор на C, диференцијална једначина (85) по $y(t) = \psi_t^*\alpha(Y)$ задовољава почетни услов $y(0) = 0$. Из јединствености решења следи да је $y \equiv 0$, чиме је доказано да је $\alpha \equiv 0$ на TL. Пошто је уз то

$$\dim L = \dim C + 1 = (n-1) + 1 = n,$$

следи да је L Лежандрова подмноготрукост. $\bigtriangledown$

Задатак 49. Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција. Доказати да је сечење $j^1 f(M)$ Лежандрова подмногострукост. ✓

У Примеру 8 на стр. 133 смо видели да диференцијал глатке функције дефинише тачну Лагранжеву подмногострукост у T^*M; Задатак 49 је контактна верзија тог тврђења. Следећа дефиниција је контактна аналогија дефиниције 10 на стр. 136.

Дефиниција 39. Лежандрова подмногострукост $L \subset J^1(M,\mathbb{R})$ је задата *генеришућом функцијом*, ако постоји раслојење E над базом M и функција $S : E \to \mathbb{R}$, таква да је скуп

$$\sigma_S := \{e \in E \mid d_{\mathrm{vert}}S(e) = 0\}$$

подмногострукост у E, а пресликавање

$$i_S : \Sigma_S \to T^*M, \qquad i_S(e) := j^1S(e) = (dS(e), S(e))$$

улагање, такво да је $L = i_S(\Sigma_S)$. Општије, ако је i_S имерзија, кажемо да је L Лежандрова имерзија задата генеришућом функцијом. $\Diamond$

Задатак 50. Формулисати и доказати контактну верзију Теореме 2 на стр. 137. ✓

Задатак 51. Нека је $L \subset T^*M$ Лагранжева подмногострукост, λ Лиувилова 1–форма на T^*M и $x_0 \in L$ фиксирана тачка. Доказати да је скуп

$$\widetilde{L} := \left\{ \left(x, \int_\gamma \lambda \right) \mid x \in L, \gamma : [0,1] \to L, \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x \right\} \subset J^1(M, \mathbb{R}),$$

Лежандрова подмногострукост. Доказати да је рестрикција пројекције

$$\pi_1 : T^*M \times \mathbb{R} \to T^*M \tag{86}$$

на $\widetilde{L}$ наткривање $\pi_1\big|_{\widetilde{L}} : \widetilde{L} \to L$. Специјално, ако је многострукост L просто повезана, многострукости $\widetilde{L}$ и L су дифеоморфне. ✓

Задатак 52. Нека је $\widetilde{L} \subset J^1(M, \mathbb{R})$ Лежандрова подмногострукост која је трансверзална на влакна пројекције (86). Доказати да је $L = \pi_1(\widetilde{L})$ тачна Лагранжева подмногострукост у T^*M. ✓

Дефиниција 40. *Таласни фронт Лежандрове подмногострукости* $\widetilde{L} \subset J^1(M, \mathbb{R})$ је скуп

$$W_{\widetilde{L}} := \pi_0^1(\widetilde{L}) \subset J^0(M, \mathbb{R}) \cong M \times \mathbb{R},$$

где је $\pi_0^1 : J^1(M, \mathbb{R}) \to J^0(M, \mathbb{R})$ пројекција (82).

Таласни фронт тачне Лагранжеве подмногострукcти $L \subset T^*M$ је скуп

$$W_L := \{(\pi(x), f(x)) \mid x \in L\} \subset M \times \mathbb{R},$$

где је $\pi : T^*M \to M$ канонска пројекција, а $f : L \to \mathbb{R}$ потенцијал рестрикције Лиувилове форме на L, тј. функција за коју је $\lambda\big|_L = df$. ♢

Приметимо да је таласни фронт W_L дефинисан до на транслацију $(q, t) \mapsto (q, t + c)$, пошто је потенцијал 1–форме дефинисан до на константу. Из Задатка 51 следи да је таласни фронт Лагранжеве подмногострукости, до на вертикалну транслацију, график вишезначне функције

$$x \mapsto \int_\gamma \lambda$$

где је γ пут у L који спаја фиксирану тачку $x_0 \in L$ са x. Дефинисаност таласног фронта само до на вертикалну транслацију је последица произвољности избора тачке x_0.

4. Контактне многострукости

4.1. Контактоморфизми. Природне симетрије контактних многострукости су дифеоморфизми који чувају контактну структуру. Чак и ако се ради о коориjентабилној контактној многострукости, тј. и ако је контактна дистрибуција задата контактном формом, овакви дифеоморфизми не морају да чувају и контактну форму. Прецизна дефиниција је следећа.

Дефиниција 41. Нека су (M_1, ξ_1) и (M_2, ξ_2) контактне многострукости. Дифеоморфизам $\psi : M_1 \to M_2$ се назива *контактним дифеоморфизмом* или *контактоморфизмом* ако је $\psi_*\xi_1 = \xi_2$. Специјално, контактоморфизам контактне многострукости (M, ξ) је дифеоморфизам $\psi : M \to M$, такав да је $\psi_*\xi = \xi$. ♢

Задатак 53. Нека су (M_1, ξ_1) и (M_2, ξ_2) коoријентабилне контактне многострукости са контактним формама α_1 и α_2. Доказати да је дифеоморфизам $\psi : M_1 \to M_2$ контактоморфизам ако и само је $\psi^*\alpha_2 = f\alpha_1$ за неку глатку функцију $f : M_1 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ✓

Задатак 54. Нека је α контактна форма у $\mathbb{R}^{2n+1}$ уведена у Примеру 2 на стр. 125 и

$$\alpha_1 := dz + \sum_{j=1}^{n} p_j dq_j, \qquad \alpha_2 := dz + \sum_{j=1}^{n} r_j^2\, d\theta_j = dz + \sum_{j=1}^{n}(q_j dp_j - p_j dq_j),$$

где су (r_j, θ_j) поларне координате у (q_j, p_j)–равни. Доказати да ове три форме дефинишу контактне структуре ξ, ξ_1 и ξ_2 на $\mathbb{R}^{2n+1}$ и да су контактне многострукости $(\mathbb{R}, \xi)$, $(\mathbb{R}, \xi_1)$ и $(\mathbb{R}, \xi_2)$ контактоморфне. ✓

Пример 36. Пресликавање

$$\psi : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}, \qquad (\mathbf{q}, \mathbf{p}, z) \mapsto (r\mathbf{q}, r\mathbf{p}, r^2 z)$$

је, за свако $r > 0$, контактоморфизам простора $\mathbb{R}^{2n+1}$ са стандардном контакнтом структуром из Примера 2 на стр. 125. Одатле следи да је свака лопта контактоморфна јединичној лопти. Приметимо, као симплектички контраст ове контактне појаве, да из Лиувилове теореме у симплектичкој геометрији следи да су две лопте симплектоморфне ако и само ако имају исти полупречник. ♯

Нека је $\psi_t : M \to M$ фамилија дифеоморфизама коoријентабилне контактне многострукости генерисана векторским пољем X. Из

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\alpha = \psi_t^*(d(X \lrcorner \alpha) + X \lrcorner d\alpha)$$

следи да, ако је

$$d(X \lrcorner \alpha) + X \lrcorner d\alpha = 0 \tag{87}$$

онда ψ_t чува *контактну форму* α. Специјалан случај векторског поља које задовољава (87) издвајамо следећом дефиницијом.

Дефиниција 42. Нека је M коoријентабилна контактна многострукост са контактном формом α. Векторско поље R на M, које задовољава

$$R \lrcorner d\alpha = 0 \qquad \text{и} \qquad \alpha(R) = 1$$

назива се *Рибовим векторским пољем.* ◊

Лема 13. *За сваку контактну форму α на коoријентабилној контактној многострукости M постоји јединствено Рибово векторско поље R.*

△ Из $(d\alpha)^{\wedge n} \neq 0$ следи да је $E := \ker d\alpha$ подраслојење ранга 1 тангентног раслојења TM, а из $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} \neq 0$ да је $\alpha \neq 0$ на E, па је нормализацијом $\alpha(R) = 1$ једнозначно одређено сечење $R : M \to E$. ▽

Напомена 28. Важно је имати на уму да је Рибово векторко поље дефинисано *контактном формом* α, а не *контактном структуром* ξ. Зато се често користи и ознака R_α. У општем случају је $R_{\alpha_1} \neq R_{\alpha_2}$ за контактне форме α_1 и α_2 које дефинишу контаткну структуру ξ. ◇

Да би дифеоморфизам $\psi : M \to M$ коориjентабилне контактне многострукости (M, ξ) са контактном формом α био контактоморфизам, довољно jе, али не и неопходно, да он чува форму α – $f_*\xi = \xi$ важи и ако jе $\psi^*\alpha = f\alpha$ за неку глатку функциjу $f : M \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$. То значи да векторско поље X генерише фамилиjу контактоморфизама и ако задовољава модификациjу jедначине (87)

$$d(X\lrcorner\alpha) + X\lrcorner d\alpha = f_t\alpha,$$

за неку глатку фамилиjу функциjа $f_t : M \to \mathbb{R}$.

Дефинициjа 43. Векторско поље $X : M \to TM$ коjе задовољава

$$d(X\lrcorner\alpha) + X\lrcorner d\alpha = f\alpha, \tag{88}$$

за неку глатку функциjу $f : M \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ назива се *контактним векторским пољем.* $\Diamond$

Први сабирак на левоj страни у (88) jе диференциjал функциjе

$$H := \alpha(X) : M \to \mathbb{R}. \tag{89}$$

Ако претпоставимо да jе

$$X\lrcorner d\alpha = dH(R_\alpha)\alpha - dH, \tag{90}$$

где jе R_α Рибово векторско поље дефинисано контактном формом α, онда jе

$$d(X\lrcorner\alpha) + X\lrcorner d\alpha = dH(R_\alpha).$$

То значи да jе X контактно векторско поље.

Дефинициjа 44. Функциjу $H : M \to \mathbb{R}$ за коjу важи (89) и (90) називамо *контактним Хамилтониjаном* генерисаним контактним векторским пољем X. $\Diamond$

Следећа теорема показуjе да су сва контактна векторска поља генерисана контактним Хамилтониjанима (за разлику од симплектичког случаjа) и да jе свака глатка функциjа контактни Хамилтониjан неког контактног векторског поља.

Теорема 18. *Нека jе (M, ξ) коориjентабилна контакнта многострукост, α контактна форма и R_α Рибово векторско поље.*

(а) *Векторско поље $X : M \to M$ jе контактно ако и само ако постоjи глатка функциjа $H : M \to \mathbb{R}$, таква да jе*

$$\alpha(X) = H \qquad \text{и} \qquad X\lrcorner d\alpha = dH(R_\alpha)\alpha - dH. \tag{91}$$

(б) *За сваку глатку функциjу $H : M \to \mathbb{R}$ постоjи jединствено контактно векторско поље X коjе задовољава (91).*

$\triangle$ У дискусиjи пре формулациjе ове теореме доказали смо импликациjу ($\Leftarrow$) у (а). Обрнуто, ако jе X контактно векторско поље, израчунавањем вредности 1–форми у (88) на Рибовом векторском пољу добиjамо

$$d(\alpha(X))(R_\alpha) = f.$$

Нека jе $H := \alpha(X)$. Из претходне jеднакости следи $f := dH(R_\alpha)$, па из (88) добиjамо

$$dH + X\lrcorner d\alpha = dH(R_\alpha)\alpha.$$

Тиме jе доказано (а).

Да бисмо доказали (б), приметимо да из недегенерисаности форме $d\alpha$ на ξ следи да постоји јединствено векторско поље $Y : M \to \xi$, такво да је

$$Y \lrcorner d\alpha\big|_{\xi} = dH\big|_{\xi}.$$

Тада је $X := Y + HR_\alpha$ тражено контактно векторско поље. $\bigtriangledown$

Теорема 19. (Грејева стабилност) *Нека је M компактна многострукост без границе и ξ_t, $t \in [0,1]$, фамилија кооријентабилних контактних структура на њој, задата глатком фамилијом α_t контактних форми. Тада постоји фамилија дифеоморфизама $\psi_t : M \to M$, таква да је $(\psi_t)_*\xi_0 = \xi_t$ за све $t \in [0,1]$.*

$\bigtriangleup$ Фамилија ψ_t коју тражимо је решење нелинеарне једначине

$$\psi_t^*\alpha_t = f_t\alpha_t, \tag{92}$$

за неку глатку фамилију фукција $f_t : M \to]0, +\infty[$. Као и у осталим примерима примене Мозеровог метода деформације, диференцирањем по t добијамо линеарну једначину

$$d(X_t \lrcorner \alpha_t) + X_t \lrcorner d\alpha_t + \frac{\partial \alpha_t}{\partial t} = g_t\alpha_t, \tag{93}$$

где је

$$X_t = \frac{d\psi_t}{dt} \circ \psi_t^{-1} \qquad \text{и} \qquad g_t = \frac{d}{dt}(\log f_t) \circ \psi_t^{-1}. \tag{94}$$

Ако нађемо векторско поље X_t и функцију g_t који задовољавају једначину (93), онда ће решења ψ_t, f_t једначине (94) на компактној многострукости M да задовољавају тражени услов (92).

Решење X_t једначине (93) тражићемо тако да буде $X_t \in \xi_t$ (то поједностављује налажење функције g_t и доказ теореме). Тада (93) постаје

$$X_t \lrcorner d\alpha_t + \frac{\partial \alpha_t}{\partial t} = g_t\alpha_t. \tag{95}$$

Ако израчунамо вредност обе стране ове једначине у Рибовом векторском пољу R_{α_t} добијамо

$$\frac{\partial \alpha_t}{\partial t}(R_{\alpha_t}) = g_t. \tag{96}$$

То значи да, ако једначина (95) има решења, онда је g_t дато изразом (96). Дакле, немамо други избор него да тим изразом дефинишемо g_t. Треба да докажемо да, за тако дефинисано g_t, једначина (95) има јединствено решење X_t. Међутим, та једначина је је једнакост 1–форми које имају исту вредност на R_t за сваки избор поља X_t у ξ_t. Пошто је сваки вектор Y_t облика $Y_t = R_{\alpha_t} + Z_t$ за неко $Z_t \in \xi_t$, проблем се своди на налажење поља $X_t \in \xi_t$ за које (95) важи на ξ_t. Егзистенција и јединственост таквог поља следе из недегенерисаности форме $d\alpha_t\big|_{\xi_t}$. $\bigtriangledown$

Теорема 20. (Дарбу) *Нека је (M, ξ) контактна многострукост димензије $2n+1$. Тада за сваку тачку $p \in M$ и сваку контактну форму α у која задаје ξ у околини p, постоји координатна околина U са координатама $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, z)$ у којима је*

$$\alpha = dz + \sum_{j=1}^{n} q_j dp_j.$$

$\triangle$ Тврђење је локално, па га је довољно доказати за $M = \mathbb{R}^{2n+1}$ и $p = 0$. Нека је α контактна форма која задаје ξ у околини нуле и нека је

$$\alpha_0 = dz + \sum_{j=1}^{n} q_j dp_j.$$

Помоћу елементарне Линеарне алгебре можемо да закључимо да не умањујемо општост ако претпоставимо да је $\alpha = \alpha_0$ у нули. Нека је

$$\alpha_t := t\alpha + (1-t)\alpha_0, \qquad t \in [0,1].$$

Тада је у нули $\alpha_t \equiv \alpha$ и $d\alpha_t \equiv d\alpha$, па је $\alpha_t \wedge (d\alpha_t)^{\wedge n} \neq 0$ у некој околини нуле, што значи да је α_t фамилија контактних форми. У жељи да применимо Мозеров метод деформације, посматрајмо једначину

$$\psi_t^* \alpha_t = \alpha_0 \tag{97}$$

по ψ_t. Њено решење ψ_1 обезбеђује координатну карту у којој α има тражени запис, тј. $\psi_1^*\alpha_1 = \alpha_0$. Диференцирањем по t нелинеарну једначину (97) сводимо на линеарну

$$d(\alpha_t(X_t)) + X_t \lrcorner d\alpha_t + \frac{\partial \alpha_t}{\partial t} = 0. \tag{98}$$

Ако нађемо векторско поље X_t које је решење једначине (98), једнопараметарска фамилија дифеоморфизама ψ_t коју оно генерише је тражено решење једначине (97).

Решење једначине (98) можемо да тражимо у облику $X_t = H_t R_{\alpha_t} + Y_t$, где је R_{α_t} Рибово векторско поље контактне форме α_t, H_t глатка функција и $Y_t \in \ker \alpha_t$. Када у (98) ставимо X_t у том облику и израчунамо вредност обе стране (које су 1–форме) у R_{α_t} добијамо

$$dH_t(R_{\alpha_t}) + \frac{\partial \alpha_t}{\partial t}(R_{\alpha_t}) = 0.$$

Одатле можемо да нађемо H_t за свако фиксирано t, интеграцијом дуж интегралних кривих γ Рибовог векторског поља (уз избор почетних услова на трансверзалној хиперповрши), уколико те криве нису периодичне. Тај услов можемо да постигнемо у довољно малој околини нуле. Када имамо H_t, векторско поље Y_t налазимо тако да важи (98), тј. тако да је

$$dH_t + Y_t \lrcorner d\alpha_t + \frac{\partial \alpha_t}{\partial t} = 0.$$

Ова једначина има јединствено решење $Y_t \in \ker \alpha_t$, зато што је контактна форма $d\alpha_t$ недегенерисана на контактној дистрибуцији $\xi_t = \ker\, \alpha_t$. $\bigtriangledown$

4.2. Хиперповрши контактног типа. Важан пример контактних многострукости је извесна класа хиперповрши у симплектичкој многострукости. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост.

Дефиниција 45. Векторско поље Y на симплектичкој многострукости (M, ω) назива се *Лиувиловим векторским пољем* ако је

$$L_Y \omega = \omega.$$

Хиперповрш $N \subset M$ која је трансверзална на Лиувилово векторско поље називамо *хиперповрши контактног типа.* . $\diamondsuit$

Теорема 21. *Ако је Y Лиувилово векторско поље на симплектичкој многострукости (M, ω) и N хиперповрш контактног типа, онда је $\alpha = Y \lrcorner \omega$ контактна форма на N. Другим речима, дистрибуција $\xi = \ker \alpha$ у TN је контактна структура на N.*

$\triangle$ Нека је $\dim M = 2n$. Из дефиниције Лиувиловог векторског поља, форме α и Картанове формуле следи

$$\omega = L_Y \omega = d(Y \lrcorner \omega) = d\alpha,$$

па је

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge(n-1)} = (Y \wedge \omega) \wedge \omega^{\wedge(n-1)} = n^{-1}(Y \lrcorner \omega)^{\wedge n}.$$

Пошто је Y трансверзално на TN, из недегенерисданости симплектичке форме следи да је последњи израз различит од нуле на TN. Тиме је доказано да је α контактна форма на N. $\triangledown$

Пример 37. Сфера

$$\mathbb{S}^{2n-1} = \{q_1^2 + \ldots + q_n^2 + p_1^2 + \ldots + p_n^2 = 1 \mid (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}\}$$

је контатна многострукост са контактном формом

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} (q_j \, dp_j - p_j \, dq_j).$$

Да бисмо то доказали, приметимо да је

$$Y := \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r},$$

где је r радијална сферна координата, Лиувилво векторско поље трансверзално на сферу. Заиста, у Декартовим координатама је

$$Y = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left(q_j \frac{\partial}{\partial p_j} + p_j \frac{\partial}{\partial q_j} \right),$$

па је $L_Y \omega = d(Y \lrcorner \omega) = \omega$. Трансверзалност радијалног поља на сферу је очигледна, па је сфера хиперповрш контактног типа. Из Теореме 21 следи да је она контактна многострукост са формом $Y \lrcorner \omega$. Непосредно се проверава да је ова форма једнака форми $\alpha/2$ (која задаје исту контактну структуру као и форма α). $\sharp$

Задатак 55. Нека су $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ стандардне локалне координате на T^*M, у којима Лиувилова 1–форма има запис

$$\lambda = p_1 \, dq_1 + \ldots + p_n \, dq_n.$$

Доказати да је

$$Y = p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + \ldots + p_n \frac{\partial}{\partial p_n}$$

Лиувилово векторско поље. Закључити да је сферно котантгентно раслојење хиперповрш контактног типа (упоредити са Примером 45 на стр. 184). $\checkmark$

4.3. Симплектизација контактне многострукости. У Теореми 21 смо доказали да су хиперповрши контактног типа у симплектичким многострукостима коориjентабилне контактне многострукости. Ове хиперповрши су више од само jедног примера контактних многострукости: свака коориjентабилна контактна многострукост може да се добиjе на таj начин. Пре него што то видимо, уведимо jедну важну класу тачних симплектичких многострукости. Нека je α контактна форма на контактноj многострукости M димензиjе $2n-1$ и $\omega := d(e^t\alpha)$ 2–форма на $M \times \mathbb{R}$. Тада je

$$\omega^{\wedge n} = (e^t\,dt \wedge \alpha + e^t\,d\alpha)^{\wedge n} = ne^{nt}\,dt \wedge \alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge(n-1)} \neq 0,$$

па je ω симплектичка форма.

Дефинициjа 46. Нека je (M,ξ) коориjентабилна контактна многострукост са контактном формом α. Пар $(M \times \mathbb{R}, d(e^t\alpha))$ назива се *симплектизациjом* контактне многострукости M. $\Diamond$

Ако je $M\times\mathbb{R}$ симплектизациjа коориjентабилне контактне многострукости M, онда je$Y = \partial/\partial t$ Лиувилово векторско поље трансверзално на $M \times \{t_0\}$ за свако $t_0 \in \mathbb{R}$, па je $M \times \{t_0\} \cong M$ хиперповрш контактног типа.

Задатак 56. Нека je M коориjентабилна контактна многострукост и $M\times\mathbb{R}$ њена симплектизациjа. Доказати да je подмногострукост $L \subset M$ Лежандрова ако и само ако je $L \times \mathbb{R} \subset M \times \mathbb{R}$ Лагранжева. ✓

Симплектизациjа контактне многострукости може да се дефинише и без претпоставке о коориjентабилности. Нека je (M,ξ) контактна многострукост. За свако $p \in M$ контактна хиперраван може да се опише као jезгро функционала $l_q \in T^*_qM \setminus \{0\}$, коjи je jединствен до на мултипликативну константну. Ове функционале називамо *контактним функционалима*. Нека je $E \subset T^*M$ скуп свих контактних функционала, тj. раслоjење дефинисано са

$$l_q \in E_q \;\Leftrightarrow\; \ker l_q = \xi_q, \qquad E := \bigcup_{q\in M} E_q.$$

Приметимо да E ниjе векторско раслеоjење: $E_q \cong \mathbb{R}\setminus\{0\}$ за свако $q \in M$.

Задатак 57. Доказати да су следећа тврђења еквивалентна:
(а) контактна структура ξ je коориjентабилна;
(б) раслоjење E има сечење;
(в) простор E има две компоненте повезаности. ✓

Нека je $\sigma \in \Omega^1(E)$ 1–форма дефинисана са

$$\sigma_p := \pi^*_{\pi(p)}p,$$

где je $\pi : E \to M$ рестрикциjа канонске проjекциjе $\pi : T^*M \to M$. Другим речима, ако je $p \in E_q$ и $X_p \in T_pE$, тада je $(\pi_p)_*(X_p) \in T_qM$, и

$$\sigma_p(X_p) = p((\pi_p)_*(X_p)).$$

Дефинициjа 47. Пар $(E, d\sigma)$ назива се *симплектизациjом* контактне многострукости (M,ξ). $\Diamond$

Симплектизациjа из Дефинициjе 46 зависи од избора контактне форме, док je симплектизациjа у Дефинициjи 47 канонски изведена из контактне структуре. Ако je контактна многострукост (M,ξ) коориjентабилна, простор E има две компоненте повезаности; форма σ на свакој од њих је пропорционална форми $e^t\alpha$ из Дефиниције 46.

4.4. Контактизација симплектичке многострукости. Нека је (M, ω) тачна симплектичка многострукост димензије $2n$, тј. нека је $\omega = d\lambda$ за неку 1–форму λ на M. Тада је са

$$\alpha_E := dz - \lambda \in \Omega^1(M \times \mathbb{R}) \tag{99}$$

дефинисана контактна форма на $E = M \times \mathbb{R}$. Услов максималне неинтеграбилности форме α_E следи из недегенерисаности симплектичке форме ω:

$$\alpha_E \wedge (d\alpha_E)^{\wedge n} = (dz - \lambda) \wedge \omega^n = dz \wedge \omega^n \neq 0$$

(у последњој једнакости смо искористили чињеницу да је $\lambda \wedge \omega^n \in \Omega^{2n+1}(M)$, па је, због $\dim M = 2n$, $\lambda \wedge \omega^n = 0$). На исти начин се показује да је

$$\alpha_P := d\theta - \lambda \tag{100}$$

контактна форма на $P = M \times \mathbb{S}^1$.

Дефиниција 48. Многострукост $E = M \times \mathbb{R}$ са контактном формом (99) (или $P = M \times \mathbb{S}^1$ са контактном формом (100)) се назива *контактизацијом* тачне симплектичке многострукости M. $\diamondsuit$

Пример 38. Контактизација котангентног раслојења T^*M је $J^1(M, \mathbb{R})$. $\sharp$

Задатак 58. Нека су $E = M \times \mathbb{R}$ и и $P = M \times \mathbb{S}^1$ контактизације тачне симплектичке многострукости M.

(а) Доказати да је подмногострукост $L \subset M$ тачна Лагранжева ако и само ако постоји сечење $s : M \to E$такво да је подмногострукост $s(L) \subset E$ Лежандрова.

(б) Нека је, за подмногострукост $L \subset M$ и сечење $s : M \to P$, подмногострукост $s(L) \subset P$ Лежандрова. Доказати да је подмногострукост L Лагранжева. ✓

Напомена 29. Контактизацију је могуће спровести и под слабијом претпоставком да је, за неко $\hbar > 0$, $[\omega/\hbar]$ *целобројна кохомолошка класа*, тј. да је

$$[\omega/\hbar] \in H^2(M; \mathbb{Z}) \subset H^2(M; \mathbb{R}) \cong H^2_{\mathrm{dR}}(M)$$

(што је еквивалентно са $\int_A \omega \in \hbar \cdot \mathbb{Z}$ за све $A \in H_2(M; \mathbb{Z})$). Тада постоји главно $U(1)$–раслојење P над M, са конексијом којој је ω форма кривине[23]. Та конексија дефинише контактну структуру на P. За многострукост P, сем термина *контактизација*, користи се и термин *предквантизација* многострукости M.

Хопфово раслојење

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{S}^{2n+1} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{C}P^n. \end{array}$$

(Пример 42 на стр. 115) може да се добије као контактизација симплектичке многострукости $\mathbb{C}P^n$, што је још један начин да снабдемо сферу непарне димензије контактном структуром (видети Пример 37).

[23]Кривину смо дефинисали на стр. 119, као форму на P, а не на M. Међутим, можемо да је сматрамо и формом на M, пошто та дефиниција укључује хоризонталну пројекцију. Еквивалентно, можемо да говоримо о форми кривине $\pi^*\omega$ на P, где је $\pi : P \to M$ канонска пројекција.

За изабрано $\hbar$, раслојење P је јединствено до на изоморифзам, а контактна структура, тј. конексија чија је кривина ω, је јединствена до на контактоморфизам: ако су ξ_1 и ξ_2 две такве контактне структуре, постоји дифеоморфизам $f : P \to P$ такав да је $f_* \xi_1 = \xi_2$.

Међутим, промена константе $\hbar$ мења и топологију раслојења P. Тачна симплектичка многострукост, тј. случај $[\omega] = 0$, је специјални случај ове конструкције; добијено раслојење P је у том случају тривијално раслојење $M \times U(1) \cong M \times \mathbb{S}^1$ са контактном формом (100). $\diamond$

ГЛАВА 3

Комплексне многострукости

Литература

[1] В.И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, Москва, 1974
[2] В. Драговић, Д. Милинковић, *Анализа на многострукостима*, Математички факултет, Београд, 2003
[3] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные групы*, Наука, Москва, 1984

[4] R. Abraham, J.E. Marsden, Foundations of Mechanics, AMS Chelsea Publishing, 2008
[5] F. Adams, Lectures on Lie Groups, Benjamin Cummings, Reading Mass. 1969
[6] M. Akveld, D. Salamon, Loops of Lagrangian submanifolds and pseudoholomorphic discs, Geometric and Functional Analysis, Vol 11, 609–650, 2001
[7] F.J. Almgren, Jr, Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of the Bernstein's theorem, Ann. of Math. 85 (1966), 277–292
[8] V.I. Arnold, Contact Geometry and Wave Propagation, L'Esneignement Mathématique, Université de Genève, 1989
[9] V.I. Arnold, A.B. Givental, Symplectic Geometry, у књизи Dynamical Systems 4, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer 2001
[10] M. Audin, On the topology of Lagrangian Submanifolds. Examples and counter–examples, Portugaliae Mathematica, Vol 62, Fasc 4, 375–419, 2005
[11] M. Audin, J. Lafontaine, Holomorphic Curves in Symplectic Geometry, Birkhäuser, 1994
[12] S. Bates, A. Weinstein, Lectures on the Geometry of Quantization, Berkeley Math. Lecture Notes, AMS, 1997
[13] A. Banyaga, Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique, Comm/ Math. Helv. 53 (1978), 174–227
[14] A. Banyaga, The Structure of Classical Diffeomorphism Groups, Kluwer, 1997
[15] S.N. Bernstein, Sur un théorème de géométrie et ses applications aux equations aux dérivées partielles du type elliptique, Comm. de la Soc. Math. de Kharkov 15 (1915–1917), 38–45
[16] P. Biran, K. Cilibak, Symplectic topology on subcritical manifolds, Coment. Math. Helv. 76, 712–753, 2001
[17] E. Bomberi, E. De Giorgi, E. Guisti, Minimal cones and the Bernstein theorem, Inventiones Math. 7 (1969), 243–269
[18] R. Bott, L. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Springer, 1995
[19] R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt, P.A. Griffiths, Exterior Differential Systems, MSRI Publications, Springer, 1990
[20] J.W. Cannon, W.J. Floyd, R. Kenyon, W.R. Parry, Hyperbolic Geometry, Flavors of Geometry, MSRI Publications, Vol 31 (1997)
[21] A.C. da Silva, Lectures on Symplectic Geometry, Springer, 2008
[22] M.P. do Carmo, Riemannian Geometry, Birkhäuser, 1992
[23] E. De Giorgi, Una estensione del teoreme di Bernstein, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 19 (1965), 79–85
[24] M. Chaperon, Une idée du type "géodésiques brisées" pur les systémes hamiltoniens, C.D. Acad. Sci. Paris 298, 293–296, 1984
[25] M. Chaperon, On generating families, Floer Memorial Volume, 283–296, Birkhäuser, 1995
[26] A. Dold, Erzeugende der Thomschen Algebra $\mathfrak{N}$, Math. Zeit. 65 (1956), 25-35
[27] S. Eilenberg, On problems of topology, Ann. of Math. (2), 50 (1949), 247–260
[28] Y. Eliashberg, N. Mishachev, Introduction to the h–Principle, American Mathematical Society, 2002
[29] W.H. Feming, On the oriented Plateau problem, Rend. Circ. Mat. Palermo II (1962), 1–22

[30] W.H. Feming, Flat chains over a finite coefficient group, Trans. Amer. Math. Soc. 121 (1966), 160–186
[31] H. Geiges, An Introduction to Contact Topology, Cambridge University Press, 2008
[32] P. Griffiths, J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley Interscience, 1994
[33] M. Gromov, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, Invent. Math. 82, 307–347, 1985
[34] M. Gromov, Partial Differential Relations, Springer, 1986
[35] M. Hirsch, Differential Topology, Springer, 1994
[36] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Springer, 1985
[37] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Vol 1,2, Wiley Interscience, 1996
[38] F. Laudenbach, J.-C. Sikorav, Persistence d'intersection avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent, Invent. Math. 82(2), 349–357, 1985
[39] M.I. Lim, Flux on compact symplectic–contact manifolds, Trends in Mathematics, Information Center for Mathematical Sciences, Vol 5, No 1, 47–51, 2002
[40] D. McDuff, Symplectic diffeomorphisms and the flux homomorphism, Invent. Math. 77, 353–366, 1984
[41] D. McDuff, Examples of symplectic structures, Invent. Math. 89, 13–36, 1987
[42] D. McDuff, D. Salamon, Introduction to Symplectic Topology, Oxford University Press, 1999
[43] J. Milnor, Topology from the Differntiable Viewpoint, Princeton University Press, 1997
[44] J. Milnor, J. Stasheff, Characteristic Classes, Princeton University Press, 1974
[45] J. Moser, On the volume elements on manifold, Trans. AMS, 120, 280–296, 1965
[46] R. Penrose, Twistor algebra, Journal of Mathematical Physics 8 (2): 345–366, 1967
[47] P. Seidel, Graded Lagrangian submanifolds, Bull. Soc. Math. France 128, 103–149, 2000
[48] R.W. Sharpe, Differential Geometry – Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program, Springer, 2000
[49] J. Simons, Minimal varietes in Riemannian manifolds, Ann. of Math. 88 (1968), 62–105
[50] R. Thom, Quelque propriétés globales des variétiés différentiables, Comment Math. Helv. 28 (1954), 17–86
[51] V.A. Zorich, Mathematical Analysis 2, Springer