Гранична расподела k-тог максимума

Нека је $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ низ независних случајних величина са заједничком функцијом расподеле F, $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ и нека је $M_n^{(k)}$ k–ти максимум међу случајним величинама $X_1, \dots, X_n$. Дакле

$$M_n^{(n)} \leqslant M_n^{(n-1)} \leqslant \dots \leqslant M_n^{(2)} \leqslant M_n^{(1)} = M_n \tag{1}$$

је варијациони низ (односно низ статистика поретка) првих n чланова низа $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Функција расподеле k-те статистике поретка $X_{(k)} = M_n^{(n-k+1)}$ дата је са

$$F_{X_{(k)}}(x) = P\{X_{(k)} \leqslant x\} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F^j(x)(1-F(x))^{n-j}. \tag{2}$$

Следећа теорема одређује граничну раподелу k-тог максимума, под претпоставком да функција расподеле F припада области привлачења неке од расподела екстремних вредности.

Теорема 1. *Нека $F \in D(G)$, где је G нека од расподела екстремних вредности и нека су $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}$, где је $n \in \mathbb{N}$, низови константи, такви да за сваки реалан број x важи*

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n \leqslant a_n x + b_n\} = G(x). \tag{3}$$

Нека је k фиксиран природан број и $x \in \mathbb{R}$. Ако је $0 < G(x) < 1$, онда важи

$$\lim_{n\to\infty} P\{M_n^{(k)} \leqslant a_n x + b_n\} = G(x) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-\ln G(x))^i}{i!}. \tag{4}$$

Ако је $G(x) = 1$, онда важи $\lim_{n\to\infty} P\{M_n^{(k)} \leqslant a_n x + b_n\} = 1$.
Ако је $G(x) = 0$, онда важи $\lim_{n\to\infty} P\{M_n^{(k)} \leqslant a_n x + b_n\} = 0$.

Функција средњег прекорачења

У овом одељку увешћемо појмове условне функције расподеле прекорачења датог нивоа и функције средњег прекорачења датог нивоа за случајну величину X са функцијом расподеле F. Функција средњег прекорачења је важна карактеристика случајних величина и са значајним импликацијама у актуарској математици, јер даје нову могућност за разликовање расподела са лаким од расподела са тешким реповима. Интерпретација је очигледна. Ако је одштета већа од неке вредности u, поставља се питање каква је расподела вероватноћа вишка у односу на u и чему је једнако математичко очекивање тог прекорачења.

Дефиниција 1. Нека је X случајна величина са функцијом расподеле F, $x_0 = x_0(F) = \inf\{x : F(x) > 0\}$, $x_F = \sup\{t : F(t) < 1\}$ и $u \in (x_0, x_F)$ дати ниво (праг). Функција

$$F^{(u)}(x) = P\{X - u \leqslant x | X > u\} = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad x \geqslant 0, \qquad (1)$$

је *условна функција расподеле прекорачења* $X - u$ *при услову* $X > u$.

Дефиниција 2. Условно математичко очекивање случајне величине $X - u$ при услову $X > u$, тј. функција

$$e_F(u) = E(X - u | X > u) = \int_{x_0}^{x_F} x \, dF^{(u)}(x), \quad x_0 < u < x_F, \qquad (2)$$

зове се *функција средњег прекорачења* датог нивоа.

У овом одељку размотрићемо неколико функција расподеле код којих важи $x_0 \geqslant 0$ и $x_F = \infty$, имајући у виду случајне величине X које представљају величине одштета па су ненегативне.

Пример 1. Одредимо функцију расподеле прекорачења и функцију средњег прекорачења датог нивоа $u > 0$ за неке од расподела са лаким и тешким репом.

(a) *Експоненцијална расподела* дата са $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$:

$$F^{(u)}(x) = 1 - e^{-\lambda x} \ \text{ за } \ x \geqslant 0; \quad e_F(u) = 1/\lambda = const. \qquad (3)$$

Ако случајна величина X има $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелу, где је $\lambda > 0$, онда је условна расподела прекорачења $X - u$, где је $u > 0$, при услову да је $X > u$, такође експоненцијална $\mathcal{E}(\lambda)$ расподела. То је још једна манифестација својства одсуства меморије код ове расподеле.

Чињеница да је код експоненцијалне расподеле функција средњег прекорачења константна, чини ову расподелу погодном да се у односу на њу одређује тежина репа произвољне расподеле.

(б) *Паретова расподела:*

$$F^{(u)}(x) = 1 - \left(\frac{x_0 + u}{x_0 + u + x}\right)^{\alpha}, \quad x \geqslant 0; \quad e_F(u) = \frac{x_0 + u}{\alpha - 1}, \ u > 0. \tag{4}$$

(в) Вејбулова расподела:

$$F^{(u)}(x) = 1 - e^{-c(u^{\tau} - (u+x)^{\tau})}; \quad e_F(u) \sim \frac{u^{1-\tau}}{c\tau}, \ u \to \infty. \tag{5}$$

Приметимо да код експоненцијалне расподеле и Вејбулове расподеле за $\tau \geqslant 1$ *(лак реп) важи: функција средњег прекорачења конвергира ка константи кад* $u \to \infty$. *С друге стране, код Паретове расподеле и Вејбулове расподеле за* $0 < \tau < 1$ *(тежак реп), функција средњег прекорачења тежи бесконачности када* $u \to \infty$. *Проверите да аналогна својства важе и за остале расподеле са лаким, односно тешким.* $\triangle$

Прекорачења високог нивоа и генералисане Паретове расподеле

Претходно смо увели појмове условне функције расподеле прекорачења датог нивоа (прага), при услову да је случајна величина узела вредност већу од тог нивоа, као и појам функције средњег прекорачења која даје још једну могућност разликовања расподела са лаким од расподела са тешким реповима. Један од важних задатака у теорији екстремних вредности јесте и питање асимптотске расподеле прекорачења високог нивоа (прага) када тај ниво тежи десном крају носача расподеле. Теоријски резултати који су добијени у вези са тим дају могућност моделирања прекорачења високог нивоа, а важну улогу у томе имају такозване *генералисане Паретове расподеле*. То су три параметарске фамилије расподела које су у специјалној вези са расподелама екстремних вредности. Постоји једноставна аналитичка веза између функције расподеле екстремних вредности G и одговарајуће генералисане Паретове функције расподеле W и она је дата са

$$W(x) = 1 + \ln G(x) \quad \text{ако је} \quad \ln G(x) > -1. \tag{1}$$

Дефиниција 1. Генералисане Паретове расподеле (кратко ГП расподеле) се слично као и расподеле екстремних вредности дају у α- и γ-параметризацији. Стандардни представници ГП расподела у α-параметризацији су следеће функције расподеле:

- Експоненцијална расподела:

$$W_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако је} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-x}, & \text{ако је} \quad x \geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

- Паретова расподела са параметром $\alpha > 0$:

$$W_{1,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако је} \quad x < 1, \\ 1 - x^{-\alpha}, & \text{ако је} \quad x \geqslant 1. \end{cases} \tag{3}$$

- Бета расподела са параметром $\alpha > 0$:

$$W_{2,\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако је} \quad x < -1, \\ 1 - (-x)^{\alpha}, & \text{ако је} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1, & \text{ако је} \quad x \geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

Приметимо да се за $\alpha = 1$ добија да $W_{2,\alpha}$ одређује равномерну расподелу на интервалу $[-1, 0]$ и да је овако дефинисана класа бета расподела подскуп двопараметарске фамилије бета расподела која се уобичајено разматра у статистичкој литератури.

Густине стандардних ГП расподела су на одговарајућим носачима расподеле дате са:

• Експоненцијална расподела:

$$w_0(x) = e^{-x}, \quad x \geqslant 0; \tag{5}$$

• Паретова расподела са параметром $\alpha > 0$:

$$w_{1,\alpha}(x) = \alpha x^{-(\alpha+1)}, \quad x \geqslant 1; \tag{6}$$

• Бета расподела са параметром $\alpha > 0$:

$$w_{2,\alpha}(x) = \alpha(-x)^{(\alpha-1)}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 0. \tag{7}$$

Параметри положаја и размере. Ако је $W_{i,\alpha}(x)$, где $i \in \{1, 2\}$, функција расподеле случајне величине X, онда је функција расподеле случајне величине $\sigma X + \mu$, где је $\sigma > 0$ и $\mu \in \mathbb{R}$, дата са

$$W_{i,\alpha,\mu,\sigma}(x) = W_{i,\alpha}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \tag{8}$$

При томе, μ је параметар положаја, а σ је параметар размере. Носач расподеле $W_{1,\alpha,\mu,\sigma}$ је интервал $[\mu+\sigma, +\infty)$, а носач расподеле $W_{2,\alpha,\mu,\sigma}$ је интервал $[\mu - \sigma, \mu]$. Аналогно се на интервалу $[\mu, +\infty)$ дефинише експоненцијална расподела $W_{0,\mu,\sigma}$ са параметром положаја μ и размере σ.

γ-параметризација ГП расподела добија се из α-параметризације увођењем смене $\gamma = 1/\alpha$ код Паретове расподеле, односно $\gamma = -1/\alpha$ код бета расподеле. Добијају се следећи изрази за функције расподеле:

$$W_\gamma(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \geqslant 0 \;\; (\gamma = 0\text{: експоненцијална}), \\ 1 - (1+\gamma x)^{-1/\gamma}, & x \geqslant 0 \;\; (\gamma > 0\text{: Паретова расподела}), \\ 1 - (1+\gamma x)^{-1/\gamma}, & x \in [0, -1/\gamma] \;\; (\gamma < 0\text{: бета расподела}), \end{cases} \tag{9}$$

При томе, важе следеће једнакости:

$$W_\gamma(x) = \begin{cases} W_{1,\alpha,-\alpha,\alpha}(x), & \text{ако је } \gamma = \frac{1}{\alpha} > 0, \\ W_{2,\alpha,\alpha,\alpha}(x), & \text{ако је } \gamma = -\frac{1}{\alpha} < 0. \end{cases} \tag{10}$$

$$\lim_{\gamma \to 0} W_\gamma(x) = W_0(x). \tag{11}$$

Моменти ГП *расподела.* Моменти случајне величине X чија је функција расподеле W_γ, дати су следећим једнакостима:

$$E(1+\gamma X)^r = \frac{1}{1-\gamma r}, \quad \text{ако је } 1-\gamma r > 0. \tag{12}$$

$$E(X^r) = \frac{r!}{\gamma^{r+1}} \frac{\Gamma\left(\dfrac{1}{\gamma} - r\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{\gamma} + 1\right)}, \quad \text{ако је } \gamma < \frac{1}{r}. \tag{13}$$

Математичко очекивање и дисперзија случајне величине X лако се добијају коришћењем формуле (13):

$$E(X) = \frac{1}{1-\gamma}, \quad \text{ако је } \gamma < 1, \tag{14}$$

$$D(X) = \frac{1}{(1-\gamma)^2(1-2\gamma)}, \quad \text{ако је } \gamma < \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Ако у (14) и (15) пустимо да $\gamma \to 0$, добијамо да су и математичко очекивање и дисперзија случајне величине чија је функција расподеле W_0, једнаки 1.

Линеарност средњег прекорачења ГП *расподела.* У вези са питањем дебљине репа расподеле одредили смо функције средњег прекорачења за експоненцијалну и Паретову расподелу. Обе ове функције су биле линеарне (код експоненцијалне расподеле средње прекорачење је константно). Лако се одређује и функција средњег прекорачења бета расподеле која је дата функцијом расподеле (4) или функцијом (9) за $\gamma < 0$. И у овом случају добија се линеарна функција. Функција средњег прекорачења ГП расподела у γ-параметризацији може се записати у облику:

$$e_{W_\gamma}(x) = \frac{1+\gamma x}{1-\gamma} = \begin{cases} \text{за } u > 0 \text{ ако је } 0 \leqslant \gamma < 1, \\ \\ \text{за } 0 < u < -1/\gamma \text{ ако је } \gamma < 0. \end{cases} \tag{16}$$

Коефицијент правца добијене линеарне функције је $\gamma/(1-\gamma)$ и он је растућа функција по γ. Функција средњег прекорачења (као математичко очекивање) не постоји код Паретових расподела за које важи $\gamma \geqslant 1$ ($\alpha \leqslant 1$).

Интересантна је чињеница да су функције генералисаних Паретових расподела једине функције расподела код којих је функција средњег прекорачења линеарна.

Својство ППП-стабилности. Дефинисаћемо још једно својство које поседују само ГП расподеле. Уведимо прво ознаку

$$F^{[u]}(x) = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad x \geqslant u. \tag{17}$$

Функција $F^{[u]}$ је функција расподеле прекорачења нивоа (прага) u. У односу на функцију $F^{(u)}$ која је раније одређена, код функције $F^{[u]}$ дате са (17), транслиран је носач расподеле, тј. аналитичка веза између ових двеју функција је следећа:

$$F^{(u)}(x) = F^{[u]}(x + u) = \frac{F(x + u) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad x \geqslant 0. \tag{18}$$

Обе ове ознаке се срећу у литератури. Дефиниције које следе могу се формулисати коришћењем било које од њих уз малу адаптацију нормирајућих константи које се појављују. Определили смо се овде за функцију $F^{(u)}$.

Дефиниција 2. За функцију расподеле F кажемо да има својство ппп-стабилности ако постоје константе $a_u > 0$ и b_u, такве да важи једнакост

$$F^{(u)}(a_u x + b_u) = F(x). \tag{19}$$

Напомена. Скраћеница ппп долази од термина *прекорачење преко прага.* Одговарајући термин на енглеском језику је: pot-stability, као скраћеница за *peaks over thresholds stability.*

Пример 1. ГП расподеле су ппп-стабилне. Ово је тачно, јер коришћењем γ-параметризације добијамо да је

$$W_0^{(u)}(x) = W_0(x); \quad W_\gamma^{(u)}((1 + \gamma u)x) = W_\gamma(x), \text{ за } \gamma \neq 0. \tag{20}$$

Осим тога, може се доказати да су ГП расподеле једине које имају својство ппп-стабилности. $\triangle$

Размотримо сада следеће питање. Нека је F функција расподеле и $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$. Које су могуће граничне расподеле прекорачења прага u, када u расте и тежи десном крају носача расподеле, тј. тачки x_F? У вези са овим питањем наводимо резултате који су добијени у раду Balkema, de Haan (1974).

Дефиниција 3. Функција расподеле F припада области привлачења за прекорачења преко прага неке функције расподеле W, ако постоје константе $a_u > 0$ и b_u, такве да важи

$$\lim_{u \to x_F} F^{(u)}(a_u x + b_u) = W(x) \quad \text{за свако } x \in C(W). \tag{21}$$

Нека је $D_p(W)$ област привлачења за прекорачења преко прага функције расподеле W, D_0 скуп свих функција расподеле F за које важи $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\} = +\infty$ и $D(G)$ област привлачења за максимуме функције расподеле G.

Теорема 1. [Balkema, de Haan (1974)] *Нека је F функција расподеле. Ако за свако $x \in \mathbb{R}$ важи*

$$\lim_{u \to x_F} F^{(u)}(a_u x + b_u) = W(x), \tag{22}$$

где је W непрекидна функција расподеле, а $a_u > 0$ и $b_u \in \mathbb{R}$ нормирајуће константе, онда је функција расподеле W истог типа као нека од ГП *распдела W_γ, $\gamma \in \mathbb{R}$.*

Ако дозволимо могућност да гранична функција расподеле W није непрекидна, онда се као граничне могу појавити и неке недегенерисане дискретне расподеле. Важи следећа теорема.

Теорема 2. [Balkema, de Haan (1974)] *Нека је F функција расподеле за коју важи $x_F = \sup\{x : F(x) < 1\} = +\infty$. Ако постоје нормирајуће константе $a_u > 0$ и $b_u \in \mathbb{R}$, такве да за свако $x \in C(W)$ важи*

$$\lim_{u \to x_F} F^{(u)}(a_u x + b_u) = W(x), \tag{23}$$

где је W недегенерисана функција расподеле, онда је функција W истог типа као нека од следећих функција расподеле:

$$\begin{aligned} W_0(x) &= 1 - e^{-x}, \quad x \geqslant 0, \\ W_{1,\alpha}(x) &= 1 - x^{-\alpha}, \quad x \geqslant 1, \\ T_\gamma(x) &= 1 - e^{-\gamma[1+x]}, \quad x \geqslant 0, \\ Q_{\gamma,\alpha}(x) &= 1 - e^{-\gamma[1+\alpha \ln(1+x)]}, \quad x \geqslant 0, \end{aligned}$$

где је $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, а $[x]$ је ознака за највећи цео број не већи од x.

Теорема 3. *Важе једнакости: $D_p(W_0) = D(G_0) \cap D_0$ и $D_p(W_{1,\alpha}) = D(G_{1,\alpha})$, за свако $\alpha > 0$.*