RAD

JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE ZNANOSTI I UMJETNOSTI

KNJIGA 169.

MATEMATIČKO-PRIRODOSLOVNI RAZRED

41.

U ZAGREBU 1907.

KNJIŽARA JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE (DIONIČKE TISKARE)
(GJURO TRPINAC.)

Prvi osnivači neeuklidske geometrije

U svečanoj sjednici Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 16. ožujka 1907.

ČITAO PRAVI ČLAN DR. VLADIMIR VARIĆAK

Dvadeset su i dva vijeka prošla, otkako je Euklid u svojim Elementima geometriju postavio na čvrste temelje strogoga logičnoga zaključivanja, i cijelo to vrijeme, do dana današnjega, služili su Elementi za ugled, kako treba na osnovi najnužnijih pretpostavaka pojedine geometrijske poučke vezati u suvislu cjelinu.No svako se zaključivanje mora oslanjati na neke premise, koje se ne dadu dokazati, već se mora uzimati, da su jasne svakome. Stoga i na početku prve knjige Euklidovih Elemenata stoje 23 definicije, 5 postulata i 5 svima ljudima zajedničkih pomisli (aksioma),[1] a onda dolaze poučci. Po rasporeďaju poučaka, koji na prvi pogled izgleda sasvim slučajan, razbira se, kako je duboko morao Euklid proniknuti u pitanja o osnovama geometrije. Od spomenutih 5 postulata prva su četiri posve jednostavna. U njima Euklid samo traži, da mu se kao očevidno prizna,

1. da se od svake tačke k svakoj tački može povući pravac;
2. da se ovaj pravac može postojano produživati;
3. da se oko svakoga središta sa svakim polimjerom može opisati krug;
4. da su svi pravi kutovi izmeďu sebe jednaki.
   Peti postulat nije tako jednostavan. On glasi:
5. ako pravac siječe druga dva pravca i s njima na istoj strani zatvora kutove, koji su zajedno manji od dva prava, pa ako ova dva pravca produžimo, onda treba da se oni sijeku na onoj strani, na kojoj ovi kutovi leže.

[1] Broj se i poredak mijenja prema različitim tekstovima, koji se upravo u prvoj knjizi najviše razlikuju. Ovako je u *I. L. Heiberga*

Na ovom 5. postulatu ili 11. aksiomu – kako se katkada zove – osniva se cijela teorija paralelâ. Iz njega se izvodi, da se jednom tačkom može povući samo jedna paralela sa zadanim pravcem, i da su odresci paralelnih pravaca među jednakim i paralelnim odrescima jednaki tj. da su paralele ekvidistantne. Nadalje se iz njega izvodi, da zbroj kutova u trokutu iznosi dva prava, pa postojanje sličnih likova i njihova svojstva.

Ako 5. postulat isporedimo sa prva četiri, razabrat ćemo, da je on kompliciran kao kakav poučak. K tomu se mogućnost toga zahtjeva može samo u vrlo ograničenome području ravnine iskustvom potvrditi. Dok se zbroj unutarnjih kutova na istoj strani transversale razlikuje znatno od dva prava, neće presjek onih dvaju pravaca biti daleko od transversale, ali ako je ta razlika vrlo neznatna, onda se u dohvatu našega iskustva ti pravci ne presijecaju. Nema dakle ovaj postulat zorne evidencije, kako je već Ptolemej primijetio. Pa zato nije čudo , da su se već najstariji tumači Euklidova teksta spoticali o nj, a i morali su se, kad su vidjeli, da Euklid dokazuje daleko jednostavnije stavke, koje bi svako mnogo laglje bez dokaza vjerovao nego peti postulat. Vazda se osjećalo, da je taj peti postulat ljaga na veličajnom djelu Euklidovu, kamen smutnje u geometriji, nedostatak u sistemu, koji treba ukloniti. A uklonio bi se taj nedostatak, kad bi pošlo za rukom ovaj postulat dokazati, izvesti ga kao posljedak iz drugih Euklidovih definicija, postulata i aksioma.

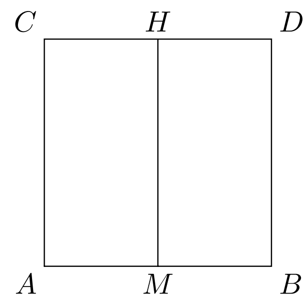
1. Prvi pokušaji. Učeni filozof *Proklo* iz 5. vijeka po Hristu spominje neke pokušaje dokaza iz staroga vijeka. U svom komentaru k prvoj knjizi Euklidovoj navodi *Posidonija* iz prvoga vijeka prije Hrista, koji je u toj namjeri Euklidovu definiciju paralelâ – kao pravaca, koji leže u istoj ravnini, a ne sastaju se ni na kojoj strani, makar ih koliko produžili – zamijenio drugom. Njemu su paralele pravci, koji leže u istoj ravnini, a posvuda imadu jednaki razmak. Ali ovdje bi trebalo tek dokazati, da je mijesto tačaka jednako udaljenih od danoga pravca također pravac. Dalje navodi *Ptolemeja* iz drugoga vijeka po Hristu; kritikuje njegov dokaz Euklidova postulata i nastoji ga sam drugim putem utvrditi. Da se o ovom postulatu kod Grkâ mnogo raspravljalo, vidi se po jednom sofizmu, kojim se dokazivalo, da se dva pravca presječena trećim ne mogu sastati, i ako su ispunjeni uvjeti postulata Euklidova.

Proklo je bio jedan od posljednjih učitelja u atenskoj školi, a živio je u doba, kad je grčka kultura bila već posve klonula. Kad je pak Justinijan atensku školu ukinuo i učitelje prognao, odoše neki u Persiju, i tako Euklid dođe k Arapima, koji su ga već u 8. i 9. vijeku stali prevoditi i komentirati. A iz arapskoga je jezika prevođen Euklid u srednjem vijeku na latinski. *Nassir-Eddin* (1201–1274.), to će reći „branič vjere”, pokušao je također da dokaže 5. postulat pretpostavljajući eksistenciju pravokutnika. Njegovo razlaganje objelodanio je i *J. Wallis* (1616–1703.), koji se i sam trudio oko toga pitanja. Mjesto 5. postulata uzima on kao aksiom to, da se svakomu trokutu može nacrtati trokut sličan, a inače makar kako velik. Od preporoda nauka u Evropi učinjen je velik broj pokušajâ, da se dokaže peti postulat; prevelik, da bismo ih ovdje mogli sve navoditi. Svi su ti pokušaji bili uzaludni; peti postulat nije niko dokazao. Ako kod takvih pokušaja nije učinjena kakva pogrješka u zaključivanju, onda je za osnovu umovanju uziman stavak ekvivalentan s petim postulatom. Takva je na primer:

1. pretpostavka, da imade sličnih trokuta;
2. da je periferni kut u polukrugu pravi;
3. da su prikuti suplementni;
4. da je očevidna eksistencija pravokutnika;
5. da zbroj kutova u trokutu iznosi dva prava;
6. da su paralelni pravci na svakom mjestu jednako udaljeni jedan od drugoga;
7. ako pravac siječe jednu paralelu, da siječe i drugu;
8. da se tačkom u kutu može vazda povući pravac, koji presijeca oba kraka;
9. da se kroz tri tačke, koje ne leže na pravcu, može položiti krug;
10. da nema gornje granice za površinu trokuta itd. Spomenut ću samo još, da se u školskim knjigama uzima kao aksiom, da se kroz jednu tačku izvan pravca može povući samo jedan pravac paralelan s njim, pa se onda na osnovi ove pretpostavke daje dokaz petoga postulata. Dakako da je i to samo prividan dokaz, jer je spomenuta pretpostavka ekvivalentna s petim postulatom. Jedno se iz drugoga može izvesti bez pomoći novih pretpostavaka. Ovaj aksiom školskih knjiga Euklidov je trideset i prvi poučak. A ne može se ni reći, da je evidentniji od 5. postulata.

Direktni dokazi ostali su bez uspjeha, a od indirektnih ogledat ćemo dva zanimljiva pokušaja, *Saccherijev* i *Lambertov*, jer su oni u pitanju paralelâ otvorili sasvim nove vidike. Oni uzimlju, da peti postulat ne postoji, pa traže posljedice te pretpostavke, t. j. ispituju, kakovi se geometrijski sistemi dobiju iz ostalih Euklidovih postulata i aksioma. A kad su ih našli, gledaju dokazati, da postoji protivurječje među njima i osnovnim načelima geometrije. Napuštanje petoga postulata misle oni da vodi do apsurdnih rezultata, pa zato drže, da je samo Euklidova geometrija ispravna.

2. Jeronim Saccheri (1667–1733.). Godine 1733. izašlo je u Milanu djelo „*Euclides ob omni naevo vindicatus*", u kome je profesor u jezuitskom kolegiju u Paviji J. Saccheri pokušao utvrditi peti postulat Euklidov i njegovu nauku o proporcijama, jer se to dvoje najviše isticalo kao ljaga na Euklidu. Prvi dio njegova djela, u kome veli da će dokazati 5. postulat, izašao je god. 1895. u Stäckelovu prijevodu.[2]



Slika 1.

Saccherijev prvi poučak glasi ovako: Ako dva jednaka pravca AC i BD s pravcem AB na istoj strani čine jednake kutove, onda su i kutovi na spojnici CD među sobom jednaki. Kada je to dokazao, ide na drugi poučak: Ako u takvom četverokutu raspolovimo stranice AB i CD u tačkama M i H, onda su s obje strane spojnice MH pravi kutovi, i kod M i kod H. Onda dolazi treći poučak: Ako se u ovakom četverokutu, u kome je $AC = BD$, kod A i B pravi kutovi, onda je spojnica $CD \lesseqgtr AB$ prema tome, da li su kutovi na CD pravi, tupi i li šiljati. Na prvi pogled činit će se, da ovaj poučak sadržava dvije nemogućnosti. Ako su jednaki pravci AC i BD okomiti na AB, onda se čini kao jedino moguće, da je $CD = AB$ i da su kutovi na stranici CD pravi. Svakomu će se činiti evidentno, da $ABCD$ mora biti pravokutnik, a ipak se to ne može dokazati bez pomoći petoga postulata.

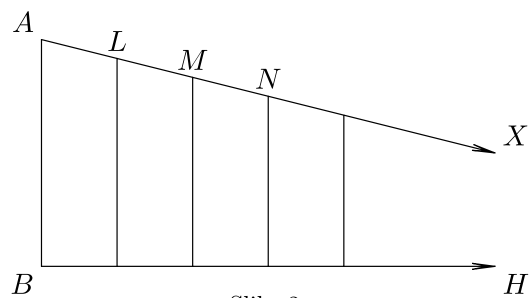
Ako peti postulat nije posljedica drugih pretpostavaka Euklidovih, onda može postojati ovakav lik, kakav zamišlja Saccheri, t. j. istokračan četverekut sa dva prava kuta; druga dva moraju biti jednaki, ali ne moraju biti pravi, već mogu biti tupi ili šiljati. Tako Saccheri prihvaćajući sve premise Euklidove osim 5. postulata, postavlja tri hipoteze: hipotezu kuta pravoga, tupoga i šiljatoga, te ispituje konsekvencije kod svake ove hipoteze. Pri tom je on našao neke poučke neeuklidske geometrije, na koje su kasnije došli Lobačevski i Bolyai. Saccheri pokazuje, ako je koja od ovih hipoteza istinita u jednom slučaju, da je istinita i u svakom drugom slučaju. No kako je on u duši ipak bio uvjeren, da je Euklidov postulat nužno istinit, da je dakle moguća jedino hipoteza pravog kuta, cijelo njegovo oštroumno razlaganje išlo je za tim, da

[2] P. Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauss. 1895. Ovim sam se djelom poslužio i za Lamberta, a i inače. Historijski razvoj ovih teorija daje i *Bonola*, La geometria Non-Euclidea. 1906.

Isporedi i *G. Ricci*, Anfänge und Entwicklung der neueren Auffassungen der Grundlagen der Geometrie. Jahresbericht der Mathematikervereinigung, XI.

pokaže apsurdnost drugih dviju hipoteza. On je mislio, da mu je to i pošlo za rukom, premda kod hipoteze oštroga kuta tek iza duga napora. Želja, da spase postulat Euklidov, zavela ga je na neke krive zaključke, i tako je on sam oborio svoju drugu i treću hipotezu, koje su ga mogle dovesti do geometrije Riemanna i do geometrije Lobačevskoga. Saccheri je žrtva predrasuda svoga vremena; autoritet je Euklidov bio tada još prevelik. U ostalom su i rezultati, do kojih je strogim euklidskim načinom došao Saccheri, bili zaista neobični, te nije čudo, da se i on sam žacao priznati mogućnost druge i treće hipoteze.

Ponajprije nalazi on, da je u pravokutnom trokutu zbroj dvaju šiljastih kutova jednak pravomu kutu, veći od njega ili manji, koju već hipotezu uzmemo za osnovu istraživanja.

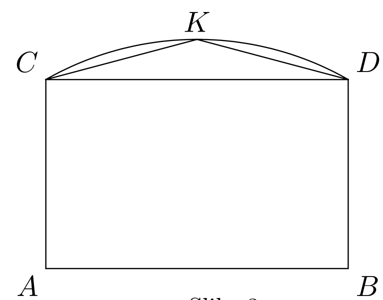


Slika 2.

Ako je u trokutu zbroj kutova jednak dvjema pravima, veći ili manji od dva prava, postoji prva, druga ili treća hipoteza. Periferni kut u polukrugu može biti pravi, tupi ili šiljati kut. Ako uz hipotezu oštroga kuta na dužini AB (sl. 2.) uzdignemo normalu BH i tačkom A pod oštrim kutom povučemo pravac AX, ne mora on sjeći BH. To će po Lobačevskome biti onda, kad je AB jednako dužini, koja odgovara kutu paralelnosti BAX, ili veće od nje. Uz hipotezu šiljatoga kuta dva pravca u istoj ravnini ili imadu zajedničku normalu ili se sijeku ili konvergiraju jedan prema drugome u beskonačnost. Ako dva pravca AX i BH konvergiraju jedan prema drugom, pa ako iz tačaka L, M, N ... pravca AX spustimo okomice na BH, onda su kutovi kod ovih tačaka s one strane, na kojoj je A, svi tupi. Što su dalje od A, to su manji i teže prema pravome kutu. – Suplementi su naime ovih kutova kutovi paralelnosti, koji pripadaju ovim okomicama; kako one bivaju manje, postaju kutovi veći. – Svaki pravac kroz A, koji prolazi kutom XAB mora sjeći BH. Koji su pravci kroz A povučeni pod većim kutom nego je XAB, oni ne sijeku BH.

Sve su ovo posljedice hipoteze oštroga kuta, no Saccheri je zabacuje kao posve krivu, jer misli, da se ona protivi prirodi pravca. On naime nalazi, da bi dva različita pravca morala u istoj neizmerno udaljenoj tački biti okomita na trećem nekom pravcu, pa drži, da bi ova dva pravca u jednom dijelu morala zajedno pasti i onda se tek jedan od drugoga odijeliti. No Saccheri čini ovdje pogrješku; on sa beskonačno udaljenim presjekom dvaju pravaca operira kao sa tačkom u konačnosti.

Premda Saccheri veli, da bi sada mogao biti posve umiren, jer je ovu treću upornu hipotezu iz korijena iščupao, piše ipak još drugi dio prve knjige, u kome ponovo dokazuje Euklidov postulat, dovodeći tobože do apsurda treću hipotezu. U tom dijelu razmatra on krivulju CKD, koja je mjesto krajnjih tačaka jednako dugih normala, koje su uzdignute na istoj strani osnovice AB. Ovo je ekvidistanta, koju su poslije našli Lobačevski i Bolyai. Za dužinu ove krivulje veli Saccheri, da je jednaka dužini pravca AB. Raspolovimo dvije linije, pa onda njihove polovine, pa četvrtine itd., te ovo raspolavljanje izvedimo konačan broj puta. Ako iza konačnoga broja raspolavljanja nađemo, da su dobiveni dijelovi tih dviju linija među sobom jednaki, onda one imadu jednake dužine. Saccheri uzima, da će ovo biti, ako i beskonačno mnogo puta izvedemo onu biparticiju, pa na tom nesigurnom temelju nalazi $\overline{AB} = \widehat{CKD}$. No očigledno je, kako on veli, da je $\widehat{CKD} > \overline{AB}$, a i dokazati se to može s pomoću poučka, da su dvije stranice u trokutu zajedno uzete veće od treće. Iz toga on zaključuje, da je hipoteza šiljatoga kuta posve kriva, jer se sama obara. No Saccheri je ovdje pogriješio, jer je snošaj, koij vrijedi za konačan broj razdjeljivanja, uzeo da vrijedi, i ako se razdjeljivanje bez kraja produži. Dužina je ekvidistante u istinu $CKD = AB.$ ch AC.S pravom kaže Beltrami, da se Saccheri izgrađujući hipotezu oštroga kuta ponio kao oštrouman i elegantan geometar. Obarajući je nespretan je i kao u neprilici počinja pogrješke.



Slika 3.

Moramo još spomenuti, da je Saccheri pomišljao i na fizikalno-geometrijske potvrde Euklidova postulata. Navodi odmah tri načina. Najprije ističe, da bi se pomnjivim fizikalnim pokusima moglo utvrditi, da je linija jednako udaljena od pravca također pravac. Ne treba misliti – kaže – da bi se taj pokus morao produžiti u beskrajnost, pa zato da je nemoguć. Ne treba to dokazivati za sve tačke te linije. Dosta bi bilo iz tri njezine tačke spustiti tri normale na osnovni pravac, pa ih izmjeriti. Ako su sve tri normale jednako duge, onda je utvrđena hipoteza pravoga kuta, tj. Euklidov postulat.

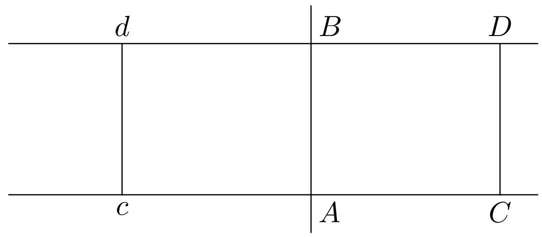
Kod drugoga načina trebalo bi izmjeriti periferni kut nad premjerom kruga. Ako je on pravi kut, peti je postulat utvrđen. Najjednostavniji mu se čini treći način, jer ga može svako izvesti. Od jedne tačke A na krugu nanesimo tri tetive AB, BC, CD, a svaka neka je kolik i polumjer. Ako spojnica tačaka A i D prolazi sredinom kruga, utvrđena je pretpostavka Euklidova.

Legendre je modificirao donekle ovaj način. Ako se polumjer šest puta nanese kao tetiva u krugu, pa se onda opet dođe na tačku, od koje se pošlo, onda vrijedi geometrija Euklidova . Poslije ćemo vidjeti, zašto se ovaki pokusi i mjerenja moraju izvoditi na golemim likovima, pa se još ne dobije pozitivan rezultat. No osnovna im je misao ispravna. Najinteresantnije je pri tom, da je već Saccheri posve pravo shvatio, da se teoriji paralelâ može pripisivati samo onolika sigurnost, koliku imadu i fizikalne teorije postavljene na osnovi iskustva.

3. J. H. Lambert (1728–1777). Kao osnovu svome razlaganju uzima Lambert polovicu Saccherijeva četverokuta, t. j. četverokut $ACHM$ (sl. 1.), u kome su tri kuta prava, a za četvrti uzima da može biti pravi, tupi ili šiljati kut. Tako postavlja i on tri hipoteze, za koje veli, da se svaka od njih može uzeti na osnovu teorije, te se dvije od njih mogu tek poradi daljih njihovih posljedica oboriti. Zato mora i od ovih dviju, kao što misli, nemogućih hipoteza izvesti priličan broj poučaka. Na isti će način raditi i sa istinitom hipotezom. I njezini će poučci biti hipotetični, dok se ne dokaže, da ona u istinu postoji. Lambert se iznenadio, kad je vidio, da se u geometriji može ovako raditi. Drži da to može podjedno biti primjer, kako treba postupati s fizikalnim hipotezama.

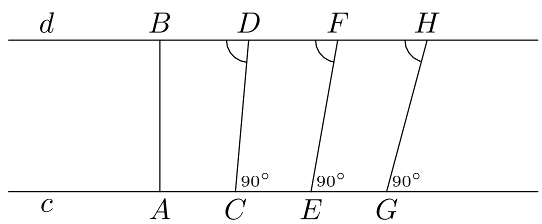
Uzmimo pravac AB i dvije okomice na nj dD i cC. Normala u makar kojoj tački pravca cC bit će, po prvoj hipotezi, normalna i na dD. Sve će ove normale biti među sobom jednako duge; pravci cC i dD ostaju vazda u istoj udaljenosti.

Kod druge su hipoteze kutovi u A, B, C i c pravi, a D i d tupi. Normale uzdignute u tačkama pravca cC presijecat će dD pod tupim kutovima, koji bivaju sve veći, što su im vrsi dalje od B. Nejednaki su odresci ovih normala među pravcima cC i dD; oni su to manji, što su dalje od AB. Zato bi se pravci dD i cC morali napokon presijecati, no to ne može biti, misli Lambert, jer su u A i B pravi kutovi. Druga hipoteza vodi brzo do apsurda. Lambertu se čini još očitije, da ova hipoteza ne može postojati poradi toga, što bi ona dva pravca zatvorala neku površinu, kad se moraju sastajati s jedne i s druge strane od AB. A tako bi nestalo razlike među pravcem i krivom crtom.



Slika 4.

Po hipotezi oštroga kuta razmiču se sve više ova dva pravca cC i dD, i to s obje strane zajedničke normale AB (sl. 5, koja je samo shematična). Međusobni njihov razmak postaje veći od svake dane veličine. Kako po ovoj trećoj hipotezi razmak dvaju pravaca, koji se ne sijeku, sve više raste, nije sigurno, da li bi normale uzdignute u tačkama C, E, G ... pravca cC zgađale pravac dD, pa makar kako daleko od A uzeli C, E, G ... – Samo Lambert ne zna, kako bi kod toga linija dD mogla ostati pravac.



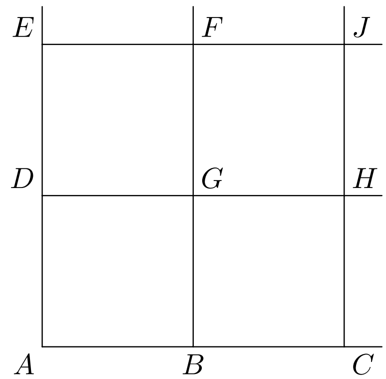
Slika 5.

Kutovi kod D, F, H ... oštri su i bivaju sve manji, što su im vrsi dalje od B; oni opadaju ća do nule. Uz ovu treću hipotezu zbroj kutova u trokutu manji je od 180°. U istostranom trokutu svaki je kut manji od 60°. – Zbroj dvaju unutarnjih kutova u trokutu manji je od trećega vanjskoga kuta. Lambert je ove konsekvencije treće hipoteze izveo poradi toga, da vidi, neće li se pokazati kakvo protivurječje; ali mu po svemu izgleda, da se treća hipoteza ne da tako lako oboriti. I Saccheriju je ona zadala najviše posla.

Poradi toga Lambert traži još dalje njezine posljedice. Najvažnija je ta, da bismo imali apsolutnu mjeru za dužine linija, za površine i za obujme tjelesa, kad bi postojala treća hipoteza. A tim bi se oborilo mišljenje, da takve apsolutne mjere ne ima. O tome pak nije do sada, veli Lambert, niko posumnjao. To se dapače, bez ikakvih skrupula, može računati među osnovna načela geometrije.

Osobiti ovaj rezultat dokazuje Lambert ovako. Neka su A, B, C, D, E pravi kutovi (sl. 6.). Uz treću hipotezu bit će G, F, H, I šiljati kutovi. I to je $H < G$, $I < H$, a tako isto $F < G$, $I < F$. Ako je $AB = AD$, onda je kut G mjera četverokuta $ADGB$; ako je pak $AC = AE$, kut I mjera je četverokuta $ACIE$.

Uzmemo li, da je $AB = AD$ i kutovi A, B, D da su pravi, onda kut G ne može pristati ni u jedan drugi četverokut osim u takav, u kome bi stranice, koje su nasuprot tome kutu, imale dužine AB i AD. Jer kad bismo uzeli veće stranice na pr. $AE = AC$, pa u C i E uzdignuli okomice, dobili bismo kut I, no taj je manji od G. Dakle G ne bi pristalo na I. Da uzmemo manje stranice, dobili bismo kut veći od G. Po tome je kut G apsolutna mjera četverokuta $ADGB$, to jest s tim je kutom dan odmah i ovaj četverokut, dakle i dužine stranica $AB = AD$. A kako se mjere kutovi, to znademo.



Slika 6.

Recimo na pr. da imamo takav četverokut $ADBG$, u kome je $AB = AD = 1$ pariska stopa, a kut je $G = 80°$ ili već koliko bude; onda bismo mogli vazda konstruirati dužinu pariske stope. Trebali bismo načiniti ovakav četverokut tako velik, da kut G bude 80°; suprotne će mu stranice imati apsolutnu dužinu pariske stope.[3]

Ovaj je posljedak tako čaroban, da bi Lambert gotovo želio, da je treća hipoteza istinita. No uz ovu jednu korist bilo bi bezbroj drugih neprilika. Trigonometrijske tablice bile bi mnogo nezgodnije. Sličnost i razmjernost likova otpala bi sasvim. Nijedan se lik ne bi mogao inače predstaviti nego u svojoj apsolutnoj veličini.[4] Astronomija bi također zlo prošla i t. d., pa zato on ipak toga ne želi.

No to su sve argumenta *ab amore & invidia ducta*, kako kaže Lambert, a tih ne smije biti u geometriji ni u ikojoj drugoj nauci. Zato se on opet vraća

[3] Trebali bismo samo konstruirati trokut ADG iz tri kuta, 45°, 90°, i $\frac{G}{2}$, a to u ovoj geometriji možemo

[4] Budući da u ovoj neeuklidskoj geometriji ne postoje slični likovi, ne mogu se izvoditi konstrukcije, koje bi bile nezavisne o jedinici dužine. Svi bi se likovi morali crtati u apsolutnoj veličini. A to je nemoguće, jer je jedinica pregolema; zato moramo davati samo shematične slike kao simbole za te konstrukcije. Pravac moramo katkad predočavati krivom crtom, normalne pravce prikazivati kao kose itd.; sve je deformirano.

k trećoj hipotezi, da je dalje istražuje.

Uz tu hipotezu u svakom je trokutu zbroj kutova manji od 180°. Ali ne samo to, već ta razlika raste s površinom trokuta. Ako od dva trokuta jedan ima veću površinu nego drugi, onda je u prvom trokutu zbroj kutova manji nego li u drugom. Kod druge je hipoteze zbroj kutova veći od 180°, a višak raste s površinom trokuta.

Još Lambert ističe, da bi druga hipoteza postojala, kad bi se mjesto ravnih trokuta uzeli sferni. I kod njih je zbroj kutova veći od 180°. Lambert zna i to, da je geometrija na kugli nezavisna o petom postulatu Euklidovu. Pa stoga misli da bi možda smio zaključiti, da se ova treća hipoteza javlja na nekakvoj imaginarnoj kugli. Jer mora biti neki razlog, zašto se ona kod ravnih likova ne da tako lako oboriti, kako se dala druga. A i sumnja, da se treća hipoteza dade pobiti bez pomoći kakva nova načela. Lambertova teorija paralelâ nije dovršeno djelo. Za života njegova nije ni ugledala svijeta, već ju je po njegovoj smrti godine 1786. publicirao Jovan Bernoulli, unuk poznatog matematičara istog imena iz Basela.

4. Doba skepse i rezignacije. Osobito pod kraj 18. i u početku 19. vijeka bilo je zanimanje za ovo pitanje vanredno živo. Malo je predmeta u području matematike, veli Gauss u jednoj recensiji od god. 1816., o kojima se toliko pisalo, koliko o nedostatku kod utvrđivanja teorije paralelâ. Rijetko prođe koja godina, da ne izađe kakav nov pokušaj, kako bi se ta praznina ispunila. A ipak ako hoćemo da govorimo otvoreno i pošteno, ne možemo kazati, da smo u bitnosti te stvari došli dalje nego Euklid pred dvije tisuća godina. Ovo bez uvijanja, iskreno priznati čini mu se da je većma primjereno ugledu nauke, nego li mrežom prividnih dokaza prikrivati ovu prazninu, koja se ispuniti ne da.[5]

U jednom radu o elementima geometrije kliče d'Alambert, da su definicija pravca i svojstva paralelnih linija kamen spoticanja i stijena sablazni „l' écueil et le scandale des éléments de la géometrie". Veliki umovi Laplace i Lagrange bave se također time. Za Lagrangea se pripovijeda, da je pod starost bio napisao raspravu o paralelama. Kad ju je u akademiji stao čitati, zastade najednom te samo reče: „moram još razmišljati o tome" i pospremi svoje papire. Legendre se po nekoliko puta svraća na to pitanje. U Engleskoj, Italiji i Njemačkoj ne zaostaju. No kad se vidjelo, da su toliki pokušaji dokazivanja bili uzaludni, postalo je zazorno baviti se problemom paralelâ.

[5] Potanje u navedenom Stäckelovu djelu, str 220. i dalje.
Gaussove izjave i bilješke o teoriji paralelâ odštampane su u VIII. knjizi njegovih skupljenih djela.

Raspravljati o petom postulatu Euklidovu držalo se da je isto, što i tražiti kamen mudraca, perpetuum mobile ili kvadraturu kruga. I ta je predrasuda bila tako jaka, da se i sam Gauss uza sav svoj veliki ugled bojao – kako kaže – vike Beoćana, pa stoga od svojih istraživanja o toj stvari nije htio izdati ništa na javnost. Jedino iz pisama, što ih je pisao svojim najvrsnijim prijateljima, razabira se, kako je daleko bio dopr'o u tom poslu.

Razumjet ćemo sada, zašto se upropastio *Vuk Bolyai*, Gaussov prijatelj iz mladosti, koji se svoga vijeka mnogo namučio oko toga pitanja, kad mu je sin Jovan javio, da je pokušao dokazati peti postulat.[6]

„Ne upuštaj se i ti u paralele, molim te – piše mu otac – sve ćeš svoje vrijeme u tom izgubiti. To vi svi skupa nećete dokazati. Ne pokušavaj paralele utvrditi ni na taj ni na ikoji drugi način ... Ja znam sve te puteve do kraja. Ja sam prošao kroz svu tu bezdanu noć; sva svjetlost i sva radost moga života utrnula se u njoj ... Zaklinjem te bogom, ostavi paralele!... Ta pomrčina progutala bi valjda i hiljadu Newtonovih kula. Nikada se na zemlji ta tmina neće razvedriti. Bijedni ljudski rod ne može imati ništa savršeno čisto, pa ni u geometriji. To je vječna i velika rana na duši mojoj, a sačuvao te bog, da se to tebi tako duboko zagrize. Ja sam mnogo o tome radio i sve sam pokušao. Došao sam do daleko boljih rezultata nego su dosadašnji, ali potpunoga zadovoljstva nijesam našao, jer ako se i tu od vrha samo malo odmakneš, survao si se u ponor. Ovo je krug, koji se sam u se vraća. Kao da je neko prokletstvo na tom ... Ko se time bavi, osiromašit će kao i onaj, koji zakopano blago traži, a ništa neće obaznati."

U ovom tonu piše mu otac još mnogo i pokazuje mu, šta je sve on uzalud pokušao, no to sina nije zastrašilo, već mu je još jače želju raspalilo, da taj čovek razuzla. Iza nekoga vremena javlja opet ocu o svojim osnovama, a on mu otpisuje: „To ja držim za veliku nesreću i ja te žalim; moj se nesretni život u tebi ponavlja. Ne gubi ni časa s time. Da stotina velikih geometara cijeli vijek s otim glavu razbijaju, bez nova kakva aksioma neće to dokazati ... Da je Gauss svoje vrijeme proveo razmišljajući o 11. aksiomu, nikad ne bi izašla njegova nauka o poligonima, njegova teorija gibanja nebeskih tjelesa, ni druga njegova djela."

Ovako skeptično raspoloženje vladalo je i kod mnogih drugih, koji su shvaćali o čemu se radi. A ipak je već sasvim blizu bilo vrijeme, kad će to pitanje biti riješeno. U matematici ne vrijedi Ignorabimus. Svaki matematički problem – veli Hilbert u svom pariskom predavanju – ili se može riješiti ili

[6] P. Stäckel, Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai. Math. u. naturw. Berichte aus Ungarn, XVII, 1–19. Najznatniji je rad *Vuka Bolyaija „Theoria parallelarum"* od god. 1804., koju je Stäckel štampao u matematičkim analima XLIX, 168–205. i to u latinskom originalu i u njemačkom prijevodu.

se može dokazati nemogućnost njegova rješenja. A oko ovoga pitanja trudilo se toliko zvanih i nezvanih, da se napokon moralo doći do prave spoznaje. To se zbilo oko tridesetih godina prošloga vijeka.

Iza premnogih pokušaja, koji su činjeni kod svih kulturnih naroda, rasjekli su taj gordijski čvor u isto doba, a ne znajući jedan za drugoga, Rus Nikolaj I. Lobačevski, profesor u sveučilištu kazanjskom, i Madžar Jovan Bolyai, ženijski kapetan u austrijskoj vojsci.[7]

5. Jovan Bolyai (1802.–1860.). Njegov otac Vuk polazio je od g. 1796.–1798. sveučilište u Göttingenu. Otuda potječe njegovo prijateljstvo s Gaussom, s kojim je sve do god. 1853. ostao u prepisci, ali s većim prestancima. Obilnu prepisku njihovu publicirali su g. 1899. Fr. Schmidt i P. Stäckel. Vuk je Bolyai bio profesor matematike i fizike u evangeličkom kolegiju u Maros-Vásárhelyu, a umro je u 81. godini 20. novembra 1856.

Sin mu Jovan rodio se 15. decembra 1802. u Kolozsvaru.[8] Već zarana pokazala se kod njega sklonost za matematiku i muziku. S dvanaest godina bio je izvrstan guslač, a s trinaest već je razumijevao diferencijalni i integralni račun. Učitelj mu je bio otac; on ga je upozorio na veliku prazninu i nepotpunost u teoriji paralelâ. S petnaest godina kanio ga je otac poslati Gaussu na nauke u Göttingen, no kad to nije išlo, dao ga je u Beč u ženijsku akademiju. Po svršenim naucima bio je u svom koru najbolji u matematici, najvještiji na guslama, a i na sablji.

Već iz akademije javlja ocu, kako on misli, da bi se dao dokazati 11. aksiom. Vidjeli smo malo prije, kako ga je otac nastojao odvratiti od toga

[7] Predaleko bi nas odvelo, kad bismo htjeli potanje prikazati rad Schweikarta, Taurinusa i Wachtera. Za prvu dvojicu može se pogledati navedeno Stäckelovo djelo, a za posljednjega Stäckelova radnja u 54. svesci matematičkih anala.

[8] *Franz Schmidt:* Lebensgeschichte des ungarischen Mathematikers Johann Bolyai de Bolya. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. VIII. Heft. 1898.

Paul Stäckel: Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai. Math. u. naturw. Berichte aus Ugarn. XVII. Band. 1899.

Paul Staäckel: Johann Bolyai's „Bemerkungen über Nicolaus Lobatschewsky's Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien".

Paul Stäckel: Untersuchungen J. Bolyai's aus der absoluten Geometrie.

Math. u. naturw. Berichte aus Ungarn. XVIII. Band. 1900.

F. Schmidt – P. Stäckel, Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai. 1899.

P. Stäckel, Franz Schmidt (prije Kovács), nekrolog, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, XI, 1902. Schmidt je mnogo zaslužan za ispitivanje života i rada obojice Bolyaija.

Kakav je bio silan čovjek Jovan Bolyai, vidi se iz priča o njemu, što ih je iznio Schmidt. U dovratnik bi znao zabijati čavle, pa ih svojom dimiškinjom presijecati. U jednoj garnizoni izazvalo ga je trinaest konjaničkih časnika na dvoboj; on je prihvatio pod uvjetom, da iza svaka dva duela smije na guslama posvirati – i pobijedio ih je sve posla. Družeći se u Beču s K. Szászom i raspravljajući s njime o tom pitanju uvidio je, kako treba definirati paralele. Prvi pravac AX, koji prolazi kroz A i ne siječe pravca BH, već od njega odskače, zove on asimptotom (sl. 2.). Njih su dva došla i do graničnog kruga; on ga zove paraciklom, jer granični krug stoji između kruga konačnoga polumjera i pravca, kao što parabola čini prijelaz od elipse na hiperbolu. A posve su pravo naslućivali, da bi istinitost 11. aksioma bila utvrđena, kad bi se moglo dokazati, da krug prelazi u pravac, kad mu polumjer beskrajno poraste. Drugovanje sa Szászom bilo je kratkotrajno, jer je Szász naskoro otišao u Ugarsku u službu. Ispitujući sâm dalje konsekvencije asimptotâ i paracikla, očekivao je J. Bolyai, da će doći do kakva protivurječja. Jedno je vrijeme i mislio, da je došao do toga i da je tako dokazao 11. aksiom. No ubrzo je uvidio svoju pogrješku. Ovo razočaranje dovelo ga je malo bliže istini, bar u negativnom smislu, jer je počeo slutiti, da se 11. aksiom i ne da dokazati i da se nepostojanje ovoga aksioma i svega onoga, što iz njega izlazi, ne protivi ostalim poučcima geometrije. Bit će da mu je god. 1823., kad je bio u Temešvaru, sinulo pravo rješenje ovoga problema. Javlja to ocu i dodaje, da još nije na cilju ali da je već našao tako zamašne stvari, da se i sam iznenadio. Iz ništa stvorio je nov svijet. Tada je bio našao relaciju među kutom paralelnosti i dužinom, koja mu odgovara. Ona mu je pak otvorila put k čitavoj neeuklidskoj trigonometriji.

Bila mu je tada tek 21. godina, a bavio se tek tri – četiri godine ozbiljno tim pitanjem. No ne smijemo smetnuti s uma, da se njegov otac preko dvadeset godina borio s poteškoćama u teoriji paralelâ i da je nastojanje sinovo svojom kritikom na pravi put izvodio. Gauss i Lobačevski bili su zreli ljudi, kad su to riješili, i zna se, da su se dugo vremena oko toga uzalud trudili. Oni su sami morali izvršiti silni duševni rad, koji je ovdje bio razdijeljen na dve generacije.

Ne zna se, kako su se kod njega dalje razvijale misli, tek se znade, da je god. 1829. predočio ocu potpun nacrt apsolutne nauke o prostoru, koja nikako ne zavisi o 11. aksiomu. Otac je iznosio svakojake prigovore, jer nije proniknuo u bitnost njegova rješenja. Kad je vidio, da oca razlozima neće uvjeriti, predloži, da se obrate Gaussu, neka on svoj sud kaže. Znao je, da će se otac pokoriti autoritetu Gaussovu, a bio je siguran, da će Gauss odmah shvatiti vrijednost njegova otkrića. Poradi toga napiše na latinskom jeziku kratak nacrt svojih rezultata. Taj je nacrt štampan god. 1831. kao dodatak očevu djelu *Tentamen*.[9] Tako nastade glasoviti *Appendix scientiam spatii ab-*

[9] *Wolfgang Bolyai de Bolya:* Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi. Drugo izdanje 1897.

solute veram exhibens, a veritate aut falsitate axiomatis XI Euclidei, a priori haund unquam decidenda, independentem, adiecta ad falsitatis quadratura circuli geometrica.

To je djelce imalo 26 strana. U januaru 1832. poslao ga je Vuk Bolyai Gaussu moleći ga, da kaže svoj sud.

Odgovor Vuku Bolyaiju počinje Gauss s time, da radnju njegova sina ne smije hvaliti, jer da hvali nju, značilo bi, da sam sebe hvali. Cijeli sadržaj toga spisa, put kojim je njegov sin udario, a i rezultati do kojih je došao, podudaraju se posve s njegovim vlastitim zamislima, od kojih neke već tridesetak godina snuje. Gauss je bio vanredno iznenađen. Kaže, da mu je nakana bila za života ništa ne publicirati od svojih rezultata, od kojih je uostalom vrlo malo do tada bio na papir stavio. Većina ljudi ne razumije pravo, o čem se radi, veli Gauss, i na malo ih se namjerio, koji su s osobitim interesom prihvaćali, što im je o tome kazivao. No s vremenom bio bi ipak sve to napisao, da ne propadne zajedno s njime. Veoma se iznenadio vidjevši, da mu je taj trud sada ušteđen, a ujedno se vrlo raduje, što ga je upravo sin staroga njegova prijatelja tako znatno pretekao.

Srdačno mu pozdravlja sina i uvjerava ga o svom štovanju, pa mu poručuje, neka se pozabavi određivanjem volumena tetraedra. Površina trokuta dade se vrlo jednostavno izraziti, pa bi se moglo očekivati, da će i za volumen tetraedra postojati sličan jednostavan izraz, no čini se, da neće tako biti.

Vuk se Bolyai jako obradovao odgovoru Gaussovu, ali sin ne. Za njega je to bilo veliko razočaranje, koje nije nikada pregorio. On nije mogao, a nije ni htio vjerovati, da je Gauss samostalno i davno prije njega došao do neeuklidske geometrije. Strastvena njegova i sumnjičava ćud zavela ga je na ružnu misao, da mu je otac još prije Gaussu odao ideje, koje je on iznio u svome „dodatku", a on mu sad hoće prioritet da preotme. Iako se poslije uvjerio da je to neopravdana sumnja, ipak ga je do kraja života jako boljelo, što Gauss nije u javnosti istaknuo vrijednost njegova rada. Razlozi, s kojih Gauss nije kanio za života o neeuklidskoj geometriji ništa objelodaniti, čine mu se ništetni, jer se u nauci i u životu radi baš o tome, da se potrebne i opće korisne – ali još nerazjašnjene stvari valjano razjasne. Smisao za matematiku uopće je jako slabo raširen, pa je pod tom izlikom trebao Gauss velik dio svojih znamenitih radova za se zadržati itd.

I s ocem se ljuto zavadio, ali ipak nikad nije zaboravio, da u naučnom pogledu ima njemu mnogo zahvaliti. Imao je mnogo i drugih neprilika, pa je tako i službu rano ostavio. Umirovljen je već god. 1833.

God. 1838. natjecao se za nagradu kod društva kneza Jablonowskoga u

Leipzigu svojom teorijom imaginarnih veličina.[10] Za ono doba značila je ta radnja znatan napredak k modernom shvaćanju imaginarnih veličina. No sve što mi danas jasno vidimo, bilo je za nj kao u magli. Genijalnom intuicijom, veli Stäckel, naslutio je on rješenje problema, ali nije mogao da ga formulira i obradi, kako bi ga i drugi mogli razumjeti, pa stoga nije mogao uspjeti kod natjecanja. Ovo ga je jako kosnulo; zanemario se uvelike.

God. 1848. počeo je opet nešto raditi. Htio je za štampu prirediti svoju nauku o prostoru i teoriji imaginarnih veličina. Sve je to bilo zasnovano na široko, ali na žalost, bilo je već prekasno. Stvaralačka snaga bila je u njega već malaksala. Mjesto jezgrovite kratkoće i originalnosti Appendixa nalazimo samo potanko raspredanje starih misli, koje nije nikamo vodilo.

Jovan Bolyai znao je za Lobačevskoga. Gauss mu je oca na nj upozorio, a on je sinu poslao djelce „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien", koje je Lobačevski god. 1840. publicirao stoga, što je držao, da je i opsežnost drugih njegovih radova kriva, što se njegovi zemljaci nijesu zanimali za to pitanje.

Jovan Bolyai iskalio je srce kritikujući ovo djelce Lobačevskoga. Ponajprije se divi, kako se to podudara s njegovim Appendixom. Čudeći se tome izriče sumnju, nije li možda eksemplar njegova Appendixa, koji je bio namijenjen nekome drugom, dospio u ruke Lobačevskomu, koji je kao duhovit čovjek shvatio mu cilj i vrijednost, pa sad sve to drugim putem nastoji obrazložiti. Još mu se vjerojatnije čini, da se pod imenom Lobačevskoga krije Gauss!

Ako se ne obazremo na ovakve neke nastranosti, naći ćemo da se i ovdje očituje njegov vrlo pronicavi duh. Ima još oštroumnih primjedbi, od kojih doduše neke ne bi bio učinio, da je poznavao i ostala djela Lobačevskoga, no u nekima je doista dubok u shvaćanju, iako nije umio svoje misli dosljedno i strogo do kraja provesti.

Sve ovo znademo iz studija Stäckelovih, koji je iz preostalih rukopisa Jovana Bolyaia izlučio i kritički publicirao njegova istraživanja o relaciji među apsolutnom i sfernom trigonometrijom, zatim o nemogućnosti, da se dokaže 11. aksiom i o volumenu tetraedra.

Umro je Jovan Bolyai 27. januara 1860. Sveučilište u Kolozsvaru proslavilo je pre četiri godine stogodišnjicu njegova rođenja izdavši njemu na uspomenu svečan spis[11] s radnjama Stäckelovima i Schlesingerovima i s Bono-

[10] P. Stäckel: Johann Bolyai's Theorie der imaginären Grössen.
Mathem. u. naturw. Berichte aus Ungarn. XVI.

[11] Libellus post saeculum quam Ioannes Bolyai de Bolya anno MDCCCII a. d. XVIII kalendas Ianuarias Claudiopoli natus est ad celebrandam memoriam eius immortalem ex consilio ordinis Mathematicorum et Naturae Scrutatorum Regiae Litterarum Universitatis

linim bibliografskim pregledom neeuklidske geometrije počevši od godine 1839.

Madžarska akademija nauka u Budimpešti osnovala je zakladu Bolyaijeva imena za nagrađivanje geometrijskih radova. Prvi je put nagrada od 10.000 kruna i spomen – medalja podijeljena Poincaréu 1905. godine.

6. Nikola I. Lobačevski (2. stud. 1793. – 24. velj. 1856. po novom kalendaru). Rodio se Nikola Ivanović Lobačevski u guberniji Nižnjo-Novgorodskoj. Otac njegov, rodom Poljak, zanimanjem arhitekt, zvao se Maksim Lobačevski, a mati Praskovija Aleksandrovna. Imali su još dva sina, starijega Aleksandra i mlađega Aleksija. Kad je g. 1797. umro otac, preseli se mati iz Nižnjega Novgoroda u Kazanj. Tu je Nikola god. 1802. pošao u gimnaziju, gdje se vazda odlikovao i vladanjem i napretkom u naucima. Naročito se ističe, da se pod kraj gimnazijskih nauka rado bavio matematikom i latinskim jezikom.

Početkom 1807. došao je u sveučilište, koje je tek pre dvije godine otvoreno bilo. Počeci su sveučilišta bili doduše vrlo čedni, no za Lobačevskoga je bila sreća, što je god. 1808. s drugim profesorima, koji su dozvani iz Njemačke, za profesora matematike došao *Martin Bartels*. Iste je godine profesuru primijenjene matematike preuzeo *Renner*, privatni docent iz Göttingena. Dvije godine kasnje došao je za astronomiju poznati *J. J. Littrow*, a za fiziku *F. Ks. Bronner*. To su bili učitelji Lobačevskomu; boljih ne bi bio mogao naći ni u najznamenitijim tadašnjim njemačkim sveučilištima. Naročito je *Bartels* bio izvrstan učitelj; upravo onakav, kakvoga je trebalo mladomu sveučilištu, u kom je tek valjalo udariti temelj matematičkoj obuci. Sva klasična djela tadašnjega vremena – *Eulerov* diferencijalni i integralni račun, *Lagrangevu* analitičnu mehaniku, *Laplaceovu* mehaniku neba, *Mongevu* primjenu analize na geometriju, *Gaussove* disquisitiones arithmeticae – tumačio je Bartels u svojim predavanjima. Izlažući povijest matematike razvijao je pred svojim darovitim slušačima veličajnu sliku napretka u tom području. Godine 1821. prešao je Bartels u Derpt, no uvijek se rado sjećao svojih kazanjskih slušača, u kojih je bilo mnogo smisla i zanosa za matematičke nauke.[12]

Utjecaj Bartelsov na razvitak matematičkih sposobnosti Lobačevskoga

Hungaricae Francisco - Iosephinae Claudiopolitanae editus 1903.

Vidi također: *L. Schlesinger*, Johann Bolyai. Jahresbericht der deutschen Mathematiker - Vereinigung, XII, 1903, str. 165–194. To je svečano čitanje tom prilikom.

[12] Za život Lobačevskoga bili su mi izvori: *Engel*, Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, Leipzig 1898., str. 349–422.

A. Wassiljef, Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. VII, 207–244.

Kratka biografija na početku skupljenih djela Lobačevskoga, koja je izdao kazanjski universitet god. 1883. i 1886.

bio je vrlo snažan, osobito kad je u julu 1811. Lobačevski promoviran na stepen magistra i tako došao u bliži doticaj sa svojim učiteljem. Magistri su imali dužnost, da drže vježbe sa slušačima, da tumače što je nejasno ostalo u predavanju profesorâ, koji su bili slabo vješti ruskome jeziku i da pomažu oko uređivanja sveučilišnoga časopisa. No glavna im je dužnost bila, da se trude oko svoga usavršivanja u odabranoj specijalnoj struci. Pod navođenjem Bartelsovim usavršio se Lobačevski u višoj matematici i stekao neobičnu vještinu u vladanju s matematičkim računskim aparatom. No glavno je, da je Bartels u svom učeniku probudio razumijevanje za matematičku strogost.

Pored matematike bavio se Lobačevski praktičnom astronomijom kod *Littrowa*. Zajedno sa svojim drugom *Simonovom* opažao je veliki komet od god. 1811. Ta je opažanja priopćio Littrow u izvještajima kazanjske universe. Kod *Bronnera* radio je u pedagoškom institutu, a bit će da ga je svestrano naobraženi Bronner uveo i u filozofiju Kantovu. Nauci Kantovoj o apriornosti geometrijske spoznaje zadao je poslije Lobačevski težak udarac.

U proljeću 1814. na preporuku Bartelsovu i Bronnerovu imenovan je za sveučilišnoga adjunkta uz dužnost, da predaje o aritmetici i algebri. Teoriju brojeva tumačio je po Gaussu i Legendreu, a sfernu trigonometriju po Cagnoliju. Već 1816. postao je izvanrednim profesorom. U to doba padaju njegovi prvi pokušaji o teoriji paralelâ. Znamo to iz prepisa predavanja, što ih je on držao od 1815–1817. Lobačevski pokušava na tri načina utvrditi teoriju paralelâ. U prvom pokušaju definira paralele kao pravce, koji imadu isti smjer, a u drugom postupa na način Bertrandov, koji se oslanja na neizmjerno velike pruge ravnine. Iz trećega se razbira, da se intensivno bavio Legendreovim istraživanjima. Legendre je bio postavio ova dva poučka:

1. U trokutu zbroj kutova ne može biti nikada veći od dva prava.[13]

2. Ako je u makar kakvom trokutu zbroj kutova jednak dvjema pravima, onda je u svakom.

[13] Po ovom poučku može zbroj kutova u trokutu biti samo manji ili jednak dvjema pravima. No kod toga Legendre ćutke pretpostavlja, da je pravac neizmjerno dug. Ako napustimo ovu pretpostavku, onda može zbroj kutova biti i veći od dva prava, kako je to u *eliptičnoj* geometriji.

M. Dehn je u svojoj radnji o ovim Legendreovim poučcima (u 53. svesci Matematičkih anala) istaknuo, da je Legendre u svom dokazivanju upotrijebio postulat neprekidnosti, naime Arhimedov aksiom. Ako se napusti i ovaj postulat, onda se prvi Legendreov poučak ne može izvesti, a drugi može. Dehn je to pokazao postavivši Ne-Legendreovu geometriju, u kojoj vrijede svi aksiomi izuzevši Euklidov i Arhimedov. U njoj se jednom tačkom može prema zadanome pravcu povući bezbroj paralelâ, a zbroj kutova u trokutu veći je od dva prava.

Ako ćemo da dokažemo Euklidov postulat o paralelama, valja nam samo naći jedan trokut, u kome zbroj kutova iznosi dva prava. Lobačevski je mislio da je taj uvjet ispunjen kod pravokutnog trokuta, u kome jedan šiljati kut iznosi $\frac{1}{8}\pi$. Kako vidimo, Lobačevski je u ovo doba bio još uvjeren, da se peti postulat mora, a i može dokazati.

U godini 1822. imenovan je Lobačevski redovnim profesorom matematike. Službene su mu dužnosti međuto silno porasle. Od prvog početka bilo je u profesorskom zboru vrlo mnogo trvenja. Naročito je bilo previše nesklada između senata i sveučilišnoga kuratora. Neki su profesori bili otpušteni, a mnogi su poradi tih nesnosnih prilika ostavili Kazanj. Među njima su bili Bronner i Bartels. Renner je ranije umro, a Littrow je otišao na opservatorij u Budim. Sva obuka u matematici, fizici i astronomiji ostala je na Lobačevskom i na još jednom profesoru. Uz čistu matematiku morao je voditi opservatorij i predavati astronomiju, mehaniku i teoretičku fiziku. K tomu su došle mnoge druge službene dužnosti. Od g. 1820. do 1827. bio je dekan matematičko-prirodoslovnoga odjela. Mnogo mu je vremena oduzimalo, što je od g. 1818. bio u školskom odboru i u odboru za izdavanje Kazanjskoga vjesnika. Neko vrijeme rukovodio je i meteorološka opažanja. Jednom je morao putovati u Petrograd, da nabavi fizikalne i astronomske aparate. Sveučilišna je biblioteka bila vanredno zapuštena, pa je tako uz ostali svoj posao preuzeo po želji senata i dužnost sveučilišnoga bibliotekera, koje je deset punih godina vršio. Tek oko polovice tridesetih godina mogao se opet ograničiti samo na predavanje čiste matematike.

Kako je međutim u sveučilištvu sve strmoglavo prošlo imenovan je kuratora Musin-Puškin. Rektorom je tada bio neki Fuchs. Novi kurator odmah je uvidio, da se uprava sveučilišta mora predati sposobnijem čoveku. Njegovim utjecajem izabrao je senat Lobačevskoga za rektora. U septembru 1827. nastupio je Lobačevski ovu – u tadanjim prilikama sveučilištva – vanredno tešku dužnost. Neprestanim nastojanjem oko uređenja naučnih instituta i namještanja novih učiteljskih sila, a prednjačeći na svakom mjestu u ispunjavanjudužnosti, pošlo mu je za rukom podići sveučilište na dostojnu visinu. To su mu drugovi jednodušno priznavali birajući ga šest puta po redu za rektora. Tako je on bio neprekidno devetnaest godina na čelu kazanjskoga universiteta, sve do godine 1846. U godini 1841. navršio je Lobačevski dvadeset i pet godina službe. Prema propisima, koji postoje u Rusiji, računao se od toga doba među umirovljene profesore, ali je još pet godina ostao svom mjestu kao honorarni profesor. Tada je imenovan zamjenikom kuratora, u kom je svojstvu ostao do pod kraj g. 1855. Umr'o je 24. februara 1856.

Za čudo je, koliko je Lobačevski mimo svoje mnoge zvanične dužnosti uradio na naučnom polju. Spomenusmo, kako se rano već zainteresirao za teoriju paralelâ. U početku je i on mislio, da će moći dokazati peti postulat. Malo pomalo približio se k pravomu shvaćanju. Godine 1823. dogotovio je rukopis udžbenika za geometriju, koji međutim nije nikada štampan. Taj se rukopis našao, pa se iz njega vidi, da se tada već znatno bio primaknuo k cilju. Izrijekom ističe, da su svi dosadanji pokušaji dokazati Euklidov postulat neuspjeli. Na drugom pak mjestu, gdje govori o trigonometriji, ima još jedna karakteristična primjedba. Trigonometrija nas uči, kako ćemo odrediti tri česti trokuta, ako su druge tri zadane. No kako trokuti nijesu kongruentni, ako imadu samo kutove jednake, ne mogu se odrediti stranice trokutu, kad su kutovi zadani. Što se dužine ne mogu odrediti s pomoću kutova ili drugim riječima: što kutovi ravnoga trokuta zavise jedino o omjeru stranica, a ne o njihovim apsolutnim dužinama, to su neki uzimali kao osnovno načelo geometrije. Lobačevski već tada izriče, da ta pretpostavka nije logički nužna. Kad može sila zavisjeti o udaljenosti, zašto ne bi kut zavisio o dužini? Raznolikost je u oba slučaja ista.

Proniknuvši tako u bitnost stvari, izradio je u godinama 1823–1825. potpuno rješenje pitanja, koje je preko dvije hiljade godina stajalo otvoreno. Dne 24. februara 1826. predložio je Lobačevski nacrt svoje nove geometrije fakultetu pod naslovom „Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstrtion rigoureuse de la théorème des parallès". Ni ova radnja nije štampana, a ni rukopis joj se dosad nije mogao naći. No sadržaj je njezin iznesen u raspravi „О началахъ геометрии" štampanoj u časopisu Казанский Вэстникъ god. 1829–1830. Ovom publikacijom pretekao je Lobačevski, Jovana Bolyaija, čiji je Appendix izašao tek 1832.[14]

Ученыя Записки kazanjskoga universiteta donijele su god. 1835. raspravu *Воображаемая геометрия*, a g. 1836. *Примэнение воображаемой геометрии къ нэкоторымъ интеграламъ.* Od g. 1835–1838. izlazila su u tim zapiscima *Новыя начала геометрии съ полной теорией паралельныхъ.* To je potpun udžbenik geometrije Lobačevskoga. Pisan je veoma jasno, postupak je sintetički. Сынъ Отечества 1834. g. štampao je kritiku Načelâ geometrije, o ko-

[14] *L. Schlesinger*, Jahresbericht XII, 176. spotiče se o to, što je Lobačevski navodeći na prvoj strani Načelâ svoju radnju od god. 1826. stavio „etc." mjesto riječi „avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles". Iz toga on zaključuje, da je doduše g. 1826. mogao imati izrađen svoj antieuklidski sistem, ali da se tek od god. 1826–1829. uvjerio o neprotivurječnosti svoga sistema. *Engel*, 372., sluti, da je tima riječima Lobačevski mislio ono astronomsko razlaganje, koje se u Engelovu prijevodu nalazi na str. 22–24. To je vrlo vjerojatno, jer se tamo kaže: ..оправдываетъ точность всэхъ вычислений обыкновенной Геометрии, и дозволяетъ принятыя начала этой послэдней разматривать, как бы строго доказаными. One izostavljene riječi navode se ipak u Engelu na str. 67. U ostalom i u naslovu njegove Pangeometrije od g. 1855. dolazi „théorie générale et rigoureuse des parallèles".

joj veli Lobačevski, da je uvredljiva i posve nepravedna.[15] Hoteći matematičarima izvan Rusije učiniti pristupnim svoje otkriće, štampao je *Géométrie imaginaire* u 17. svesku Crellova žurnala. No Lobačevski je i sam osjećao, da način izlaganja nije bio zgodan; zato je god. 1840. štampao u Berlinu kao samostalno djelo *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*. U jednom pismu Gerlingu kaže Gauss o ovoj raspravi: „Ich erinnere mich, in Gerdorfs Repertorium damals eine sehr wegwerfende Recension dieses Buches gesehen zu haben, die (nemlich die Recension) übrigens für jeden etwas kundigen Leser das Gepräge hatte von einem ganz unwissenden Mensehen herzurühren. Seitdem ich Gelegenheit gehabt habe diese kleine Schrift selbst einzusehen, muss ich ein sehr vortheilhaftes Urtheil darüber fällen. Namentlich hat sie viel mehr Concinnität und Präcision, als die grösseren Aufsätze des Lobatschefski, die mehr einem verworrenen Walde gleichen, durch den es, ohne alle Bäume erst einzeln kennen gelernt zu haben, schwer ist, einen Durchgang und Uebersicht zu finden".

Neću spominjati drugi njegov naučni rad; samo ću još istaknuti, da je g. 1855. za svečanu spomenicu pedesetogodišnjice kazanjskoga universiteta napisao *Pangéometrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles*. Slijedeće godine izašlo je to ruski.[16]

Upravno i učiteljsko djelovanje Lobačevskoga nailazilo je i kod vlasti i u društvu vazda na potpuno priznanje. Od cara Nikole I. dobio je za te zasluge briljantni prsten i naslov pravoga državnoga savjetnika. Pet puta odlikovan je redovima, a više puta carevim priznanjima i pohvalama ministarstva.

Sasvim drukčije bilo je s onim, poradi čega će njegovo ime vjekovati u historiji matematike. Učeni njegov rad nije nalazio u Rusiji nikakva razumijevanja ni priznanja. I ako su njegova „Načela geometrije" izašla već god. 1829. i ako je on u više drugih radova iznio svoj geometrijski sistem, kojim je definitivno bilo riješeno pitanje paralelâ, ipak je još godine 1853. izašla u Petrogradu od akademika Bunjakovskoga opsežna rasprava o paralelnim linijama, u kojoj Lobačevski nije ni spomenut! Ni između njegovih mnogih učenika nije se našao nijedan, koji bi njegov rad bio produžio.

Ni njegova njemački pisana istraživanja o teoriji paralelâ, čini se, nijesu našla nikakva odziva u stručnim krugovima.

No ipak je bio jedan matematičar, koji je posve shvaćao rad Lobačevskoga i uvažavao ga po zasluzi. To je bio Gauss.

[15] Полное собрание сочинений по геометрии Н. И. Лобачевского.
Казань, 1883, pg. 72. i 114.

[16] *Liebmannov* njemački prijevod izašao je g. 1902. među Ostwaldovim klasicima. Njegov prijevod Imaginarne geometrije publiciran je g. 1904. u Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, XIX.

Gauss je pod starost naučio ruski, pa je tako uz onu njemačku raspravu Lobačevskoga čitao i jednu njegovu rusku radnju. Iz pisama Gaussovih Enckeu, Gerlingu i Schumacheru vidi se, kako je on visoko cijenio „oštroumnoga ruskog matamatičara”.[17] No kako Gauss iz principa nije htio ništa o teoriji paralelâ raspravljati u javnosti, nije u svojim štampanim djelima nikad spomenuo Lobačevskoga, kao ni J. Bolyaija, čijemu se djelu tako isto divio. No za Lobačevskoga je Gauss bar to učinio, da ga je 1842. god. Predložio za člana dopisnika kr. učenoga društva u Göttingenu; diplomu je popratio vlastoručnim pismom. Ovo priznanje Gaussovo bilo je Lobačevskomu zastalno velika utjeha.

No još više! Možemo gotovo reći, da je Gauss spasao Lobačevskoga, da ne bude zaboravljen. Ni Bolyai ni Lobačevski nijesu kod svojih suvremenika naišli na nikakav odziv. Na razvoj geometrije nijesu oni u početku nimalo utjecali. Kao da ih nije ni bilo, izlazili su i dalje svake godine novi pokušaji dokazivanja petoga postulata. Međutim se s raznih drugih strana dolazilo do neeuklidske geometrije. A kad je šezdesetih godina prošloga vijeka publicirana korespondencija između Gaussa i Schumachera, pak se vidjelo, da je Gauss ne samo cijenio rad Lobačevskoga, već i sam radio na neeuklidskoj geometriji, onda su stručnjaci bili za tu stvar pridobiveni.

Njemačka ona rasprava Lobačevskoga prevedena je na francuski i engleski, pangeometrija na talijanski, a tako je isto preveđen i Appendix Bolyaijev. Istraživanja njihova dovedena su u svezu a drugim geometrijskim teorijama, s teorijom površina konstantne negativne krivosti i s projektivnim mjerenjem. Habilitaciona radnja Reimannova od god. 1854., koja je publicirana tek g. 1867. poslije njegove smrti, donijela je jednu novu neeuklidsku geometriju – eliptičnu – u kojoj pravac ima konačnu dužinu, a zbroj je kutova veči od dva prava.

Od sedamdesetih godina prošloga vijeka počelo se življe zanimanje za ova pitanja.Pa kad je g. 1893. u Kazanju proslavljena prva stogodišnjica rođenja Lobačevskoga,[18] živo učešće sa svih strana svijeta pokazalo je, da ime nje-

[17] Tako god. 1846. piše Gauss Schumacheru o onoj njemačkoj raspravi Lobačevskoga pa veli: Sie wissen, dass ich schon seit 54 Jahren (Seit 1792.) dieselbe Ueberzeugung habe. Materiell für mich Neues habe ich also im Lobatschefsky'schen Werke nicht gefunden, aber die Entwickelung ist auf anderem Wege gemacht, als ich selbst eingeschlagen habe, und zwar von Lobatschefsky *auf eine meisterhafte Art in ächt geometrischem Geiste*. Ich glaube Sie auf das Buch aufmerksam machen zu müssen, welches Ihnen gewiss ganz exquisiten Genuss gewähren wird.

[18] *Nastavni vjesnik* III, 1–12, donio je tom prilikom članak *K. Karamate*: Nikola Ivanović Lobačevski i neeuklidova geometrija.

Spomenut ću još da je god. 1900. i 1901. *Наставник* donosio referat *K. Stojanovića*: Principi nove geometrije govo nije prazan zvuk. Uspomeni *Kopernika geometrije*, kako Lobačevskoga nazivlje Sylvester, ponavljajući jednu frazu Cliffordovu, učinjena je dostojna pošta.[19]

Internacionalnim prinosima podignut je Lobačevskomu spomenik u Kazanju i kod fizičko-matematičkoga društva tamošnjega stvorena je zaklada imena Lobačevskoga za nagrađivanje geometrijskih djela, a naročito onih, koja rade o neeuklidskoj geometriji.

Prvi je put nagradom od 500 rubalja odlikovan 1897. god. *Sophus Lie*, drugi put g. 1900. *Wilhelm Killing*, a treći put g. 1904. *David Hilbert*. Četvrti put imala se podijeliti g. 1906., ali se natječaj morao obnoviti.

7. Kratak nacrt geometrije Lobačevskoga i Bolyaija. Ako neeuklidskom geometrijom nazovemo geometriju, u kojoj ne dolazi peti postulat Euklidov, onda jedan dio ove neeuklidske geometrije nalazima već kod Euklida.[20] To je naime prvih 28 poučaka prve knjige Elemenata. Tek kod 29. poučka uzima on na pomoć peti postulat.

Tako isto Новыя начала u prvih šest odsječaka rade o onim dijelovima geometrije, u kojima još ne treba govoriti o paralelama. Naročito pripadaju u to svi poučci, koji se mogu izvesti s pomoću kongruencije. Želeći uvesti bolje definicije ravnine i pravca, uzima Lobačevski za prvi element kuglu. Oko dvije čvrste tačke u prostoru opišime kugle s jednakim polumjerima. One će se presijecati u krugu. Kad mijenjamo polumjer ovih kugala, dobit ćemo neizmjerno mnogo krugova, koji ispunjuju jednu ravninu. Definicija pravca kao linije, koja de među dvije tačke pokriva u svakom polpžaju, izlazi na to, da se pravac ima držati osju rotacije krutoga tijela. Dalje raspravlja o mjerenju pravaca, kutova i uglova, zatim o kongruenciji trokuta i o sfernoj trigonometriji, koja je potpuno nezavisna o petom postulatu.

U odsječku o okomitim pravcima i ravninama dokazuje, da se dva pravca,

[19] Iza otkrića Kopernikova razmaknuo se duševni horizont ljudstva, kad se uvidjelo, da zemlja nije drugo već zrnce u moru svjetova. Ima li granicâ tome moru i kakve su? To su bila pitanja, do kojih je dovodio Kopernikov sustav. Tako su se isto u povodu istraživanja Lobačevskoga nametnula pitanja o svojstvima prostora. Jesu li ta svojstva posve isto ovakva i u onim udaljenim svjetovima, od kojih zrake svjetlosti do nas dopiru tek za stotine tisuća ili čak za milijun godina? Jesu li ista bila, kad se sunčani sistem razvijao, i hoće li biti ista i u potonje vrijeme?

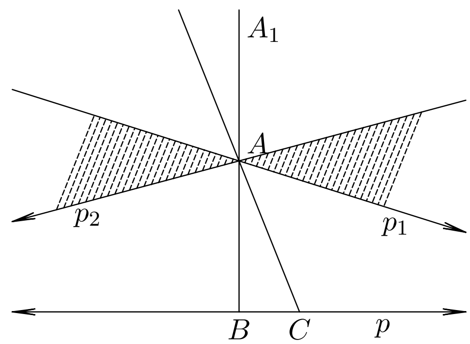
A. Wassiljef, l. c. pg. 217.

Isporedi također *F. Hausdorfa*, Das Raumproblem, Annalen der Naturphilosophie, III, 1–23.

[20] *H. G. Zeuthen*, Gebrauch und Missbrauch historischer Benennungen in der Mathematik. Verhandlungen des dritten Mathematiker-Kongresses, pg. 541. Ako se tačno pazi, kad Euklid koji postulat prvi put primijeni, onda je sve, što prethodi, jedna vrsta ne-geometrije. Tako nearhimedskoj geometriji pripadaju prve četiri knjige Elemenata

koji su okomiti na trećem pravcu, ne mogu presijecati. Iz toga se može odmah izvesti, da se ne mogu sastati dva pravca, ako ih treći neki pravac na istoj strani presijeca pod jednakim kutovima. Euklid pak uzima u petom postulatu, da će se dva pravca vazda sastati, ako oni terći neki pravac presijecaju pod nejednakim kutovima. No da tako ne moramo nužno uzimati, razabrat ćemo iz slijedećega razmatranja.

a) *Definicija paralelnosti.* Zamislimo pravac p i jednu tačku A izvan njega. Spustimo normalu AB iz te tačke na pravac i onda povucimo ostale zrake tom tačkom (sl. 7.). Što veći kut budu ove zrake zatvarale s normalom, to će dalje ležati presjek C čvrstoga pravca p i zrake, koja se uzme. Ako paralelu prema zadanome pravcu shvatimo kao granični položaj sekante, kad presjek ide sve dalje na desno od tačke B, a tako isto na lijevo, onda ćemo dobiti jednu paralelu na desnoj, a drugu na lijevoj strani. Obični naš prostorni zor, koji može obuhvatiti samo vrlo ograničen dio ravnine, kazuje nam, da se dvije paralele podudaraju.[21] Na tom iskustvu postavljamo aksiom, da se jednom tačkom A može prema zadanome pravcu p povući samo jedna paralela, t. j. pravac, koji ne presijeca onaj pravac p.



Slika 7.

Ta pretpostavka, za koju znamo, da je ekvivalentna s petim postulatom, nije logički nužna, jer će nesavršeni naš prostorni zor biti potpuno zadovoljen, ako i ne uzmemo, da se one dvije paralele sliju u jednu, već ih uzmemo da su različite, no da zatvaraju među sobom vrlo mali kut, tako malen, da ga ne mozemo mjerenjem konstatirati. Ovu je pretpostavku uzeo Lobačevski kao osnovu svoje teorije paralelâ. On dakle uzima, da se tačkom A prema p mogu povući dvije paralele. Jedno je p_1 a drugo p_2. Paralela p_1 prva je zraka na desno od normale AB, koja ne presijeca pravac p, a p_2 je prava takva zraka na lijevoj strani. Uz Euklidovu pretpostavku ima kroz tačku A samo jedna zraka, koja ne presijeca pravac p, i ona je okomita na AB. Po pretpostavci Lobračevskoga ima ih neizmjerno mnogo. Nijedna naime zraka, koja prolazi tačkom A te ide kroz one procrtane dijelove ravnine, ne može presijecati p. Naprotiv će svaka zraka povučena kroz A u onim neprocrtanim dijelovima zgađati pravac p. Tako na pr. AC.

Uzmemo li tačku A na vrh pramena zraka, moći ćemo te zrake razdijeliti na dvije grupe. Jedne će sjeći pravac p, a druge ga neće sjeći. *Granicu*

[21] *F. Klein*, Grenzfragen der Mathematik und Philosophie. Wissenschaftliche Beilage zum 19. Jahresbericht (1906.) der Philosophischen Gesellschaft an der Universität Wien

između jednih i drugih čine one dvije paralele.

b) *Kut paralelnosti.* Rekosmo malo prije, da će presjek C pasti to dalje, što veći bude kut zrake AC s normalom. Ako tačku A uzmemo dalje od pravca p, recimo u položaju A_1, zraka A_1C zatvorat će s normalom manji kut nego li zraka AC, i to tim manji, što A_1B bude veće. Što smo dalje od predmeta, pod to manjim ga kutom vidimo. Mogli bismo reći, da će se taj kut vanredno malo razlikovati od nule, kad A_1B bude vanredno veliko, dok će se veoma malo razlikovati od pravoga kuta, kad A_1B bude veoma maleno.

Paralela p_1 zatvora s normalom kut BAp_1. Njega ćemo zvati *kut paralelnosti.* Možemo reći, da je to kut, pod kojim iz tačke A vidimo onu polovicu pravca p_1, koja je na desno od tačke B. Kad dođemo u A_1, bit će taj kut manji. *Kut je paralelnosti promenljiv* uz pretpostavku Lobačevskoga, dok je uz Euklidovu konstantan. Vazda je jednak pravome kutu. Lobačevskoga može poprimiti svaku vrijednost između 0 i 90°; to stoji do dužine normale $AB = a$. Ako kut paralelnosti, koji odgovara toj normali, označimo sa $\Pi(a)$, onda je

$$\lim \Pi(a) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{za} \quad a = 0,$$

$$\lim \Pi(a) = 0 \qquad \text{za} \quad a = \infty$$

Za negativne dužine uzet ćemo po definiciji, da je

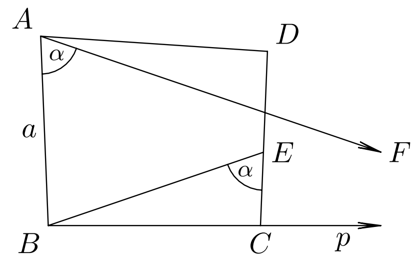
$$\Pi(a) + \Pi(-a) = \pi.$$

Budući da svakom tačkom možemo prema zadanome pravcu povući dvije paralele, moramo vazda naročito istaknuti, na koju stranu ima pravac biti paralelan sa zadanim pravcem; treba odrediti smisao paralelnosti. Na slikama ćemo to označavati strijelicom. Za paralelne se pravce može lako pokazati, da se oni asimptotski približuju jedan drugome na strani njihove paralelnosti, a na protivnoj se strani sve jače razmiču. Paralele nijesu dakle evidistantne. Pustimo li, da se tačka A giba po p_1 u smijeru paralelnosti, okomica AB biva sve manja, dok se kut paralelnosti sve više približava pravome kutu. To smo već vidjeli kod Saccherija na sl. 2. Ako je p_1 paralelan s p, i p je paralelan s p_1; paralelnost je recipročna. Dva pravca paralelna s trećim i među sobom su paralelna; paralelnost je transitivna. Dva pravca okomita na nekom trećem razmiču se beskrajno s obje strane zajedničke okomice.

c) *Konstrukcija kuta paralelnosti i dužine, koja mu odgovara.* Kako se tačkom A može prema pravcu p *povući paralela* pokazao je J. Bolyai.[22] Iz

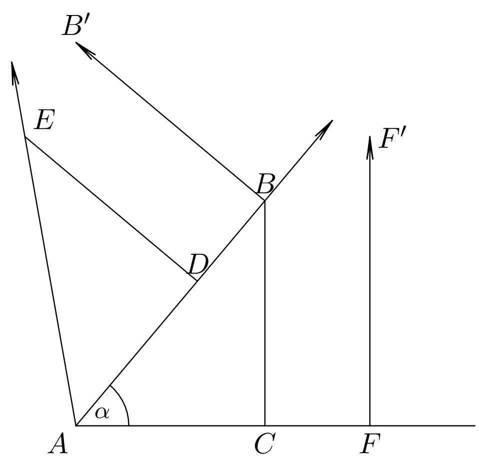
[22] Appendix, § 34. Pojedina mjesta iz Lobačevskoga neću svagdje citirati, jer sam se neprestano služio i njegovim skupljenim djelima kao i Engelovim prijevodom i komentarom.

A spustimo okomicu $AB = a$ na pravac p. U makar kojoj tački p uzdignimo na nj normalu CD (sl. 8.), i potegnimo $AD \perp CD$. Iz tačke B opišimo krug



Slika 8.

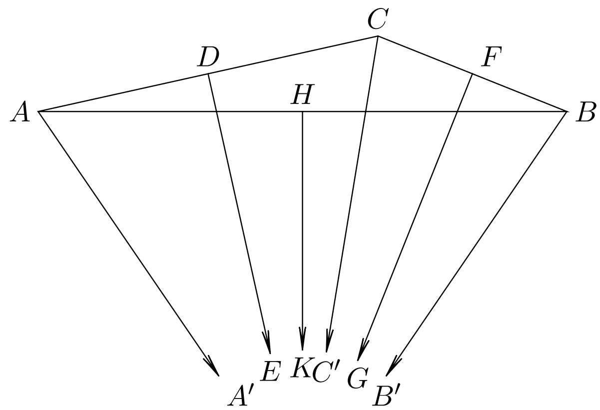
s polumjerom AD; on će CD presijecati u E pod kutom α. Ako u A na AB nanesemo kut α, dobit ćemo traženu paralelu AF. Uz Euklidovu pretpostavku pada tačka E u C i kut je $\alpha = \frac{\pi}{2}$. I kod ove slike treba držati na umu, da je ona samo shematična. Iz ove se konstrukcije razbira, kako se određuje kut paralelnosti α, koji pripada dužini a. Dužini koja odgovara kutu α označit ćemo sa $D(\alpha)$, a odrediti je možemo ovako. Nacrtajmo makar kakav pravokutni trokut ABC, u kom je α šiljati kut kod A. U B konstrurirajmo $BB' \perp AB$ i onda tačkom A povucimo $AA \parallel BB'$. Ako sada na AB nanesemo dužinu $AD = AC$ i u D uzdignemo okomicu DE, onda je AE *dužina, koja pripada kutu paralelnosti* α.[23] Učini li se $AF = AE$, onda je $FF' \parallel AB$.



Slika 9.

d) *Granični krug i granična kugla.* Okomice u *raspolovištima stranica trokuta* mogu se presijecati ili ne presijecati, a *mogu biti paralelne.* Ako su dvije od njih paralelne, onda je i treća s njima paralelna. Uzmimo, da su te tri okomice DE, FG, HK pralelne među sobom. Iz vrhova trokuta povucimo s njima paralele AA', BB', CC' (sl. 10.). Pravac AA' paralelan je

[23] *Engel-Lobatschefskij*, str. 242.



Slika 10.

s DE, a AD je okomit na DE, zato je $\measuredangle DAA'$ kut paralelnosti, koji pripada dužini $AD = \frac{b}{2}$ t. j.

$$\measuredangle DAA' = \Pi\left(\frac{b}{2}\right),$$

a tako isto

$$\measuredangle HAA' = \Pi\left(\frac{c}{2}\right)$$

Razlika je od ova dva kuta kut A u trokutu. Tako dobivamo

$$A = \Pi\left(\frac{b}{2}\right) - \Pi\left(\frac{c}{2}\right),$$

$$B = \Pi\left(\frac{a}{2}\right) - \Pi\left(\frac{c}{2}\right),$$

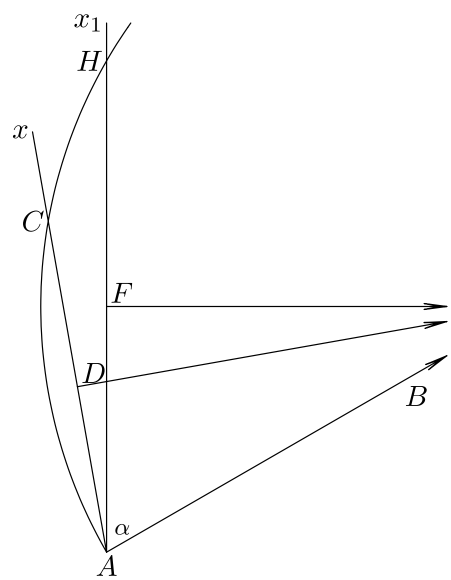
$$C = \Pi\left(\frac{a}{2}\right) + \Pi\left(\frac{b}{2}\right).$$

Kada se tri okomice u polovištima stranica trokuta presijecaju, onda vrsi trokuta leže na krugu. Ako su pak ove okomice paralelne, vrsi trokuta leže na graničnom ktugu. *Granični je krug krivulja, kod koje su okomice uzdignute u raspolovištima tetiva sve paralelne među sobom.* Ove su okomice osi graničnoga kruga. Na osnovu ove definicije možemo konstruirati koliko hoćemo njegovih tačaka.

Neka je AB jedna os graničnoga kruga. Povucimo tačkom A zrak Ax; neka ona s AB zatvara kut α . Konstruirajmo dužinu AD, koja pripada ovomu kutu paralelnosti, pa učinimo $AC = 2AD$. Tako određena tačka C

bit će tačka graničnoga kruga. Postupimo li tako i sa drugim zrakom Ax_1, dobit ćemo tačku C_1, toga kruga, i tako možemo produžiti. Za lukove s i s' dvaju graničnih krugova, koji imaju iste osi, može se lako pokazati, da je (sl. 11^{bis})

$$s = s' \, e^{\frac{x}{R}}. \tag{1}$$



Slika 11.

Sa x označujemo razmak tih dvaju krugova, a R je neka konstantna dužina. Luk s' leži s obzirom na s na strani paralelizma osi.

Da izvedemo jednadžbu (01), uzet ćemo, da je omjer lukova s i s' jednak omjeru dvaju cijelih brojeva n i m. Povucimo još treću os CC'. Neka je luk $AC = t$, $A'C' = t'$ i neka je još omjer luka t prema s jednak omjeru brojeva p i q. Imamo dakle

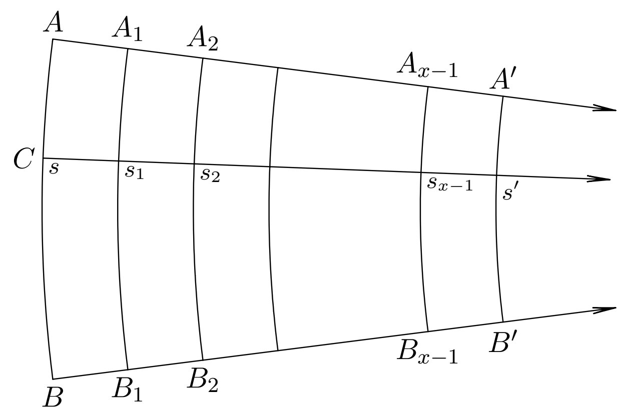
$$s = \frac{n}{m} \, s', \quad t = \frac{p}{q} \, s$$

Razdijelimo s u nq jednakih dijelova l, onda će biti

$$s = n \, q \, l, \quad s' = mq \, l, \quad t = np \, l,$$

t. j. na luku s' bit će mq, a na t bit će np takvih dijelova. Tima dijelovima na s i t odgovaraju jednaki dijelovi na s' i t', pa će biti

$$\frac{t}{t'} = \frac{s}{s'} = \frac{n}{m}$$



Slika 11[bis]

Omjer dvaju graničnih lukova između dvije osi ne zavisi o dužini samih lukova, već jedino o njihovu razmaku.

Neka razmak lukova s i s' iznosi ξ jedinica duzine. Razdijelimo AA' u ξ dijelova, a tako i BB' i položimo djelištima koaksijalne granične krugove. Neka je luk $A_1B_1 = s_1$, $A_2B_2 = s_2$, $\ldots$ $A_xB_x \equiv A'B' = s'$. Ako stalni omjer dvaju graničnih lukova, kojima je razmak jedinica dužine, označimo sa e, onda je

$$s : s_1 = e, \quad s_1 : s_2 = e, \quad s_2 : s_3 = e, \ldots \; s_{x-1} : s' = e$$

Izmnožimo li ove omjere, izlazi

$$s = s' e^{\xi}$$

Broj e mora se uzimati veći od jedan, ako hoćemo, da lukovi bivaju manji na strani paralelnosti osi. A budući da se jedinica za dužine može uzeti po volji, možemo je tako uzeti, da ovo e bude baza prirodnih logaritama. Tu jedinicu dužine označimo sa R, pa onda možemo pisati

$$s = s'\, e^{\frac{x}{R}},$$

jer je $\xi = \frac{x}{R}$.

Ako premjer kruga beskrajno poraste, prelazi krug u pravac uz pretpostavku Euklidovu, a uz pretpostavku Lobačevskoga prelazi u granični krug. Kad granični krug rotira oko jedne osi, na pr. oko AB, izvodi on zakrivljenu površinu, koju zovemo *graničnom kuglom*. Svaka paralela prema AB povučena tačkom granične kugle može se uzeti za njenu os. Ravnina okomita na os siječe graničnu kuglu u krugu. Ako na graničnoj kugli uzmemo makar gdje dvije tačke C i D, pa kroz njih povučemo osi granične kugle, te će osi biti jednako priklonjene preme tetivi CD. Svaku os granične kugle možemo držati njenom osi rotacije. Dio granične kugle može se po njoj pomicati bez deformacije.

Ravnina položena po osi presijeca graničnu kuglu u graničnom krugu. Svu su granični krugovi među sobom identični. Kroz dvije tačke na njoj možemo položiti segment samo jednoga graničnoga kruga. Taj se segment može beskrajno produživati, a da se ne povratimo na početak. *Na graničnoj kugli imade dakle granični krug svojstva analogna s pravcem u Euklidovoj ravnini.* Tu analogiju možemo još dalje provesti.

Položimo ravnine kroz tri osi granične kugle. One će na graničnoj kugli isijecati tri granična kruga, koji će sačinjavati jedan granični trokut. Ako se tri ravnine sijeku u paralelnim pravcima (kao što su ovdje one tri osi), zbroj plošnih kutova iznosi dva prava. Buduči da granična kugla sve svoje osi siječe ortogonalno, *zbroj kutova u graničnom trokutu iznosi koliko i zbroj kutova u ravnom Euklidovom trokutu.*

Možemo još pokazati, *da na graničnoj kugli postoji Euklidov postulat.*[24]. Zamislimo ravninu ρ i jednu tačku A izvan te ravnine. Spustimo iz A normalu AB na ρ. Tačkom B povucimo sve zrake u ravnini ρ. Tačkom A možemo sa svakim ovim zrakom povući samo po jednu paralelu. Ove paralele sačinjavaju čun. Budući da svakom izvodnicom možemo položiti samo jednu tangencijalnu ravninu na ovaj čun, izlazi, da se *jednim pravcem može prema zadanoj ravnini položiti samo jedna paralelna ravnina.*

Uzmimo sad na graničnoj kugli dva granična kruga G i G', koji se ne presijecaju. Neka prvi prolazi tačkom L, a drugi tačkom K. Osi granične kugle, koje prolaze tima tačkama, označit ćemo sa LL' i KK'. Ravnina, u kojoj leži krug G i os LL', ne može presijecati ravninu određenu onim drugim graničnim krugom i onom drugom osi. To ćemo razabrati indirektno. Ove dvije ravnine položene su kroz dva paralelna pravca. Kad bi se one sjekle, i njihov bi presjek MM' bio paralelan s LL' i KK'. Taj presjek zgađa graničnu površinu u tački M. Ova bi tačka po svom postanju morala ležati na jednom i na drugom graničnom krugu. No pretpostavili smo, da oni ne imaju zajedničkih tačaka, pa zato ne mogu ni one ravnine sjeći jedna drugu.

Osju KK' možemo položiti neizmjerno mnogo ravnina, a one će sve graničnu kuglu sjeći u graničnim krugovima. Oni će u opće zgađati granični krug G. Na osju KK' može se položiti samo jedna ravnina paralelna s ravninom određenom graničnim krugom G i osju LL'. Ta će ravnina isijecati

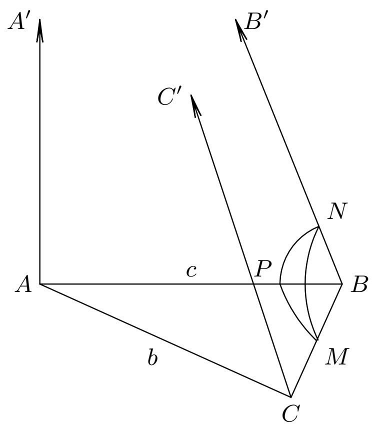
[24] В. Каганъ, Очеркъ геометрической системы Лобачевского, str. 82.

granični krug, koji ide tačkom K i ne zgađa G. Tako smo se uvjerili, da se *tačkom ne graničnoj kugli može povući samo jedan granični krug, koji ne presijeca zadani granični krug.* A to je ekvivalent Euklidova postulata na graničnoj površini.

Iz jednakosti osnovnih načela uvjeravamo se, da se *geometrija na graničnoj kugli podudara s planimetrijom Euklidovom.* Logična, formalna strana u oba je područja ista. Sve poučke i formule možemo s euklidske ravnine prenijeti na graničnu kuglu.[25] Na taj nam je način geometrija na graničnoj kugli već poznata, a to je veliko olakšanje za israživanje geometrije Lobačevskoga. Sve konstrukcije, koje se šestarom i linealom mogu izvesti u Euklidovoj ravnini, mogu se tim sredstvima izvesti i na graničnoj kugli.

Geometrija na kugli ne zavisi o petom postulatu. Pravokutnomu trokutu u ravnini može se pridružiti izvjestan sferni trokut, pa se i tom korespondencijom služi Lobačevski u svojim istraživanjima.

Temelj istraživanjima Lobačevskoga i Bolyaia bila je nova definicija paralelnosti dvaju pravaca i pretpostavka, da je kut paralelnosti promjenljiv. Glavna nam je zadaća sad, da pokažemo, kako je Lobačevski izveo *funkcioni snošaj, koji postoji među izvjesnom dužinom i kutom paralelnosti, koji joj pripada. No prije moramo izvesti trigonometriju Lobačevskoga.* To izvođenje treba pripraviti razmatranjem o *produženim trokutima.*



Slika 12.

e) *Pridruženi trokuti.* Uzmimo u ravnini pravokutan trokut ABC, u kome su katete a, b, hipotenuza c i kutovi

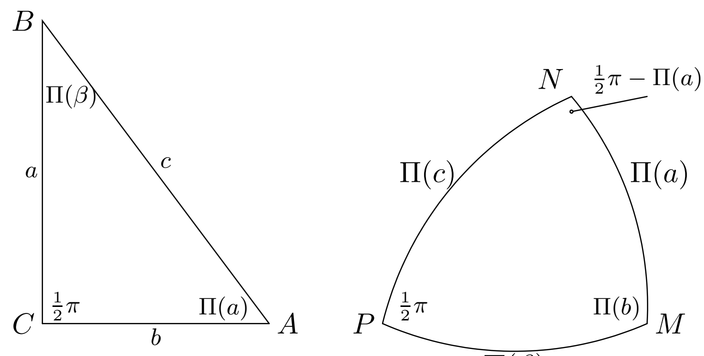
$$A = \Pi(\alpha), \quad B = \Pi(\beta), \quad C = \frac{\pi}{2}.$$

Kutove A i B možemo naime držati kutovima paralelnosti za dužine α i β. Kako su ti kutovi oštri, dužine α i β izražene su u pozitivnim brojevima. U tački A uzdignimo okomicu AA' na ravninu trokuta, a tačkom B i C povucimo prema njoj paralele BB' i CC'. Kroz ove tri paralele položimo tri ravnine. U nastalom trobridu paralelâ odradit ćemo najprije plošne kutove. Pobočke, koje se presijecaju u pravcu AA', okomite su na ravnini trokuta. Zato je među njima kut $\Pi(\alpha)$. Da su pobočke, koje se presijecaju duž CC', među sobom okomite, razabrat ćemo ovako. Pravac, koji je okomit na presjeku dviju okomitih ravnina i koji leži u jednoj od tih ravnina, okomit je na drugoj ravnini. Ravnina $AA'CC'$ okomita je na ravnini

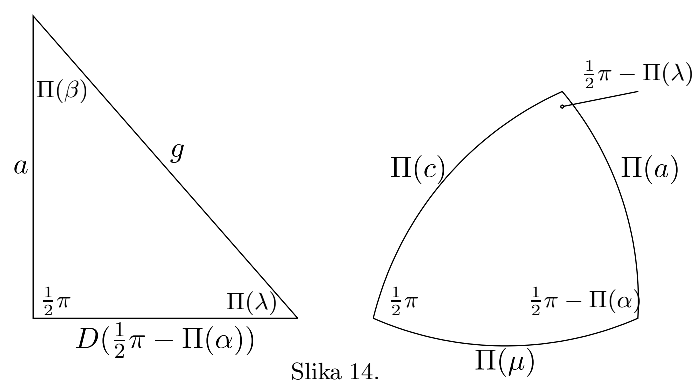
[25] Samo kod dokazivanja treba paziti na jednu važnu razliku. Dio ravnine može se obrnuti, pa će se opet uz ravninu priljubiti, a to kod granične kugle ne ide.

trokuta ABC. Njihov je presjek b. Budući da je $a \perp b$, bit će i $a \perp AA'CC'$. Pobočka $BB'CC'$, koja je položena kroz a, mora također biti okomita na tu ravninu $AA'CC'$. Drugi kut trobrida dakle je prav. A kako zbroj kutova u trobridu paralelâ iznosi dva prava, treći plošni kut bit će $\frac{1}{2}\pi - \Pi(a)$. Još ću spomenuti, da je $\measuredangle B'BA = \Pi(c)$, a $\measuredangle C'CA = \Pi(b)$. Budući da je BC okomito na AC i CC', to je $\Pi(b)$ također kut između ravnina $BB'CC'$ i ABC.

Ako sad oko ugla B opišemo kuglu s polumjerom manjim od a, dobit ćemo pravokutni sferni trokut MNP (sl. 12.), za koji lako nađemo kutove i strane.



Slika 13.



Slika 14.

Slikom 13. predočena je korespondencija među ravnim trokutom ABC i sfernim MNP. Uzmimo sad jedan ravni trokut kao na slici 14., pa potražimo sferni trokut, koji ovome odgovara na isti način, kao što MNP odgovara trokutu ABC.

Naći ćemo, da mu odgovara isti sferni trokut. Oba imadu naime hipotenuzu $\Pi(a)$ i jedan kut $\frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha)$. Po radi togaje

$$\mu = c, \quad g = \beta, \quad D\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(\lambda)\right) = b.$$

Budući da istomu pravokutnom sfernom trokutu pripadaju dva pravokutna ravna trokuta, onda su i ova dva ravna trokuta udružena.

T. j. trokutu sa stranama

$$a, \quad b, \quad c$$

i suprotnim kutovima

$$\Pi(\alpha), \quad \Pi(\beta), \quad \frac{\pi}{2}, \tag{2}$$

odgovara drugi pravokutan trokut sa stranama

$$a, \quad D\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(\alpha)\right), \quad \beta \tag{3}$$

i suprotnim kutovima

$$\frac{\pi}{2} - \Pi(b), \quad \Pi(c), \quad \frac{\pi}{2}.$$

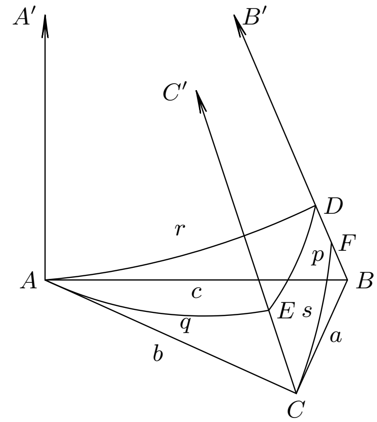
$D(\frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha))$ znači dužinu, koja odgovara kutu paralelnosti $\frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha)$. Ako bismo pak u trokutu (02) ostavili neizmijenjenu katetu b, onda bi tome trokutu na isti način pripao trokut

$$D\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(\beta)\right), \quad b, \quad \alpha,$$

$$\Pi(c), \quad \frac{\pi}{2} - \Pi(\alpha), \quad \frac{\pi}{2}. \tag{3a}$$

f) *Pomoćni izvodi.* Konstruirajmo sada graničnu kuglu, kojoj je os AA' i koja u A tangira ravninu ABC (sl. 15.). Ona će pobočke trobrida presijecati u graničnim krugovima p, q, r. Tako dobivamo jedan granični trokut ADE, u koga su kutovi isti kao plošni kutovi onoga trobrida. Iz njega dobivamo

$$p = r \sin \Pi(\alpha), \quad q = r \cos \Pi(\alpha), \tag{4}$$



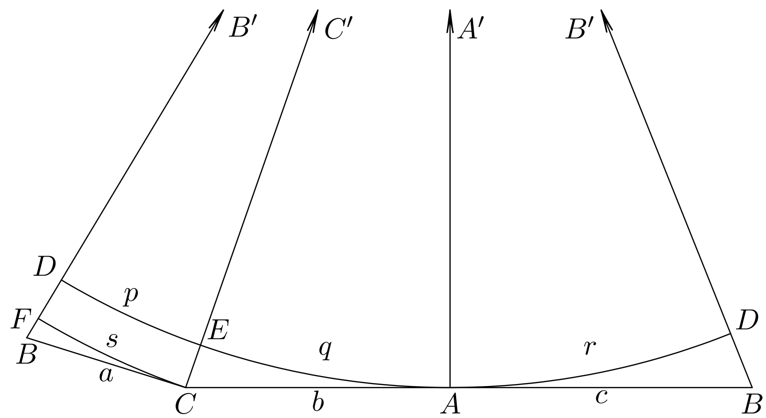
Slika 15.

jer goniometrijske funkcije možemo na graničnoj kugli definirati isto onako kao u običnoj ravnini.

Razrežimo trobrid duž BB' pa ga razložimo u ravninu. Hipotenuza c i kateta b (sl. 16.) past će u jedan pravac BC, jer su one obje bile okomite na pravac AA'. Druga kateta a bila je okomita na ravninu $AA'CC'$, dakle je okomita i na pravac CC', koji je u toj ravnini povučen njezinim podnožištem.

Stranice onoga graničnoga trokuta razvit će se u jedan granični luk, koji ide kroz A i komu je os AA'. Među paralelama BB' i CC' položimo tačkom C granični krug s, koji ima iste osi kao i p. AB je okomito na osi AA' graničnoga kruga pqr. Tačkom B ove okomice povučena je prema osi paralela BB'. Odrezak BD te paralele između one okomice i graničnoga kruga zavisi o dužini AB. Zato ćemo pisati $BD = f(c)$, i ako ne znamo, kakva je funkcija time naznačena. Samo vidimo, da se ona poništava zajedno sa c. Na isti je način $CE = f(b)$, $BF = f(a)$. Uz to je

$$f(c) = f(a) + f(b). \tag{5}$$



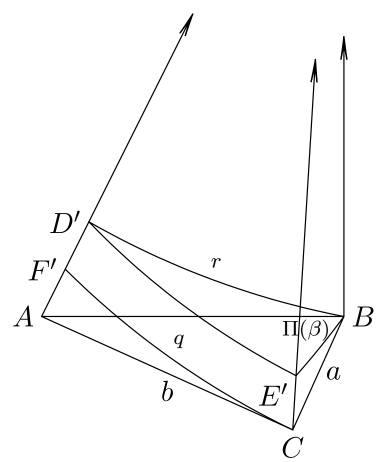
Slika 16.

Po formuli (01) bit će

$$s = p\, e^{CE} = p\, e^{f(b)}$$

a to se zbog (04) može pisati

$$s = r\, e^{f(b)} \sin \Pi(\alpha) \tag{6}$$



Slika 17.

Da smo okomicu na ravninu trokuta ABC uzdignuli u tački B mjesto u A, pa onda radili kao i prije, dobili bismo granični trokut $BE'D'$ (sl. 17.), u kom je ista hipotenuza r , a kutovi su

$$\measuredangle E' = \frac{\pi}{2}, \quad \measuredangle B = \Pi(\beta), \quad D' = \frac{\pi}{2} - \Pi(\beta).$$

Zato je

$$D'E' = r \sin \Pi(\beta).$$

Ako isporedimo sliku 17. sa 15., vidimo, da je $CF' = q$.
Dalje je (sl. 17.)

$$CE' = f(a), \quad CF' = D'E' \cdot e^{f(a)}$$

dakle

$$q = r\, e^{f(a)} \sin \Pi(\beta) \tag{7}$$

Kad ovu vrijednost za q isporedimo s onom iz (04), izlazi

$$\cos \Pi(\alpha) = e^{f(a)} \sin \Pi(\beta) \tag{8}$$

Na sl. 15. i 17. vidimo još, da je

$$CF = BE' \quad \text{t. j.} \quad s = r \cos \Pi(\beta).$$

Kad ovo unesemo u (06), izlazi

$$\cos \Pi(\beta) = e^{f(a)} \sin \Pi(\alpha). \tag{9}$$

Prijeđemo li na trokut pridružen trokutu ABC, onda po formulama (02) i (03) znamo, da a ostaje isto, dok $\Pi(\alpha)$ treba izmijeniti u komplement od $\Pi(b)$, a β u c. Tako iz (08) dobivamo

$$\sin \Pi(\beta) = e^{f(a)} \sin \Pi(c). \tag{10}$$

Pomnožimo ovo sa $f(b)$; s obzirom na (05) biva

$$e^{f(b)} \sin \Pi(b) = e^{f(c)} \sin \Pi(c). \tag{11}$$

Prijeđemo li pak od ABC na trokut (3a), dobivamo iz (09)

$$\sin \Pi(a) = e^{f(b)} \sin \Pi(c) \tag{12}$$

i

$$e^{f(a)} \sin \Pi(b) = e^{f(c)} \sin \Pi(c). \tag{13}$$

g) *Neeuklidska trigonometrija.* U ravnom pravokutnom trokutu možemo mijenjati katete, a da se hipotenuza ne promijeni. Poradi toga se može u (11) postaviti $b = 0$, a da se c nepromijeni. Kako je $f(0) = 0$, $\Pi(0) = \frac{\pi}{2}$, izlazi

$$e^{f(c)} = \frac{1}{\sin \Pi(c)} \tag{14}$$

Ovo postoji za svaku vrijednost od c, jer za hipotenuzu možemo uzeti svaku dužinu. Kad se u (08) uvrsti $e^{f(a)} = \frac{1}{\sin \Pi(a)}$, biva

$$\cos \Pi(\alpha) \sin \Pi(a) = \sin \Pi(\beta). \tag{15}$$

Iz (09) tako isto

$$\cos \Pi(\beta) \sin \Pi(b) = \sin \Pi(\alpha), \tag{16}$$

dok se s pomoću (05) dobiva

$$\sin \Pi(a) \sin \Pi(b) = \sin \Pi(c). \tag{17}$$

Kad u posljednjoj jednadžbi izvedemo supstituciju, kojom se s trokuta (02) prelazi na (03), dobit ćemo

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(\alpha) \cos \Pi(c). \tag{18}$$

Ovo su četiri relacije, koje postoje među dijelovima pravokutnog ravnog trokuta ABC. Iz posljednje tri mogu se izvesti sve ostale. Pišemo li A i B mjesto $\Pi(\alpha)$ i $\Pi(\beta)$, onda za pravokutni trokut imamo ovih deset formula :

$$\left.\begin{array}{cc}
\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \cdot \sin \Pi(b), & \sin \Pi(c) = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B, \\
\operatorname{tg} \Pi(c) = \operatorname{tg} \Pi(a) \cdot \sin A, & \operatorname{tg} \Pi(c) = \operatorname{tg} \Pi(b) \sin B, \\
\cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \cdot \cos B, & \cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos A, \\
\sin A = \sin \Pi(b) \cos B, & \sin B = \sin \Pi(a) \cos A, \\
\operatorname{tg} A = \cos \Pi(a) \operatorname{tg} \Pi(b), & \operatorname{tg} B = \cos \Pi(b) \operatorname{tg} \Pi(a).
\end{array}\right\} \tag{19}$$

Kosokutni trokut obrađuje se rastavljanjem u dva pravokutna. Dobivaju se jednadžbe:

$$\left.\begin{array}{c}
\operatorname{tg} \Pi(a) \sin A = \operatorname{tg} \Pi(b) \sin B, \\
\cos A = \frac{\sin \Pi(a) - \sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)}, \\
\cos \Pi(a) = \frac{\sin A \cos \Pi(c)}{\sin A \cos B + \cos A \sin B \sin \Pi(c)}, \\
\sin \Pi(a) = \frac{\sin B \sin C}{\cos A + \cos B \cos C}
\end{array}\right\} \tag{20}$$

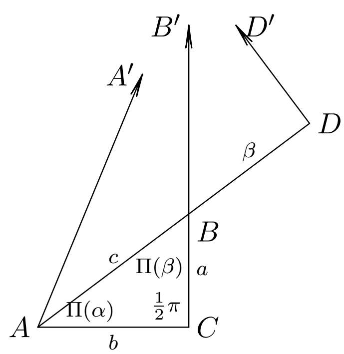
Iz posljednje jednadžbe razbiramo, da je trokut određen posve, ako su mu kutovi zadani. Poradi toga ne postoje slični likovi u geometriji Lobačevskoga.

h) *Izračunavanje funkcije* $\Pi(x)$. Uzmimo opet pravokutni trokut ABC s hipotenuzom c, s katetama a, b i njihovim suprotnim kutovima $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$. Produžimo a i c preko vrha B, prvu po volji, a drugu do tačke D, tako da bude $BD = \beta$. Onda će okomica DD' biti paralelna sa BB'. Tačkom A povucimo paralelu AA' prema DD'. To je ujedno paralela prema BB'. Sada se vidi, da su kutovi

$$A'AD = \Pi(c+\beta), \quad A'AC = \Pi(b),$$

pa je stoga

$$\Pi(b) - \Pi(\alpha) = \Pi(c+\beta). \tag{21}$$



Slika 18.

U istom trokutu ABC nanesimo dužinu β od tačke B prema A i po tom u D povucimo okomicu DD' na onu stranu na kojoj leži sam trokut. Ako je $c > \beta$, tačka D ležat će između A i B (sl. 19.). Povucimo još AA' paralelno sa DD' i BB'. Kako je kut

$$DAA' = \Pi(c-\beta), \quad CAA' = \Pi(b),$$

izlazi

$$\Pi(b) + \Pi(\alpha) = \Pi(c-\beta). \tag{22}$$

Lako se može izvesti, da ova relacija postoji i onda, kad je $c = \beta$ ili $c < \beta$; dakle vazda.

Ako je $\beta = c$ (sl. 20), onda je AA' okomito na AB, dakle $\Pi(b) = \frac{1}{2} - \Pi(\alpha)$. No budući da je $c - \beta = 0$, dakle $\frac{1}{2}\pi = \Pi(0) = \Pi(c-\beta)$, vidimo da (22) postoji i u ovom slučaju.

Kad je $c < \beta$ tačka D pada na lijevo od A (sl. 21.) u udaljenosti $\beta - c$ od A . Okomica DD' je paralelna s a i s AA', koje je paralelno s BB'. Lako se razbira, da je

$$CAA' = \pi - DAA' - \Pi(\alpha)$$

ili

$$\Pi(b) = \pi - \Pi(\beta - c) - \Pi(\alpha).$$

Po definiciji kuta paralelnosti za negativne dužine bit će

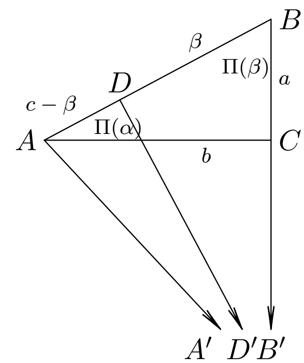
$$\pi - \Pi(\beta - c) = \Pi(c-\beta),$$

pa tako je opet

$$\Pi(b) = \Pi(c-\beta) - \Pi(\alpha).$$

Tako je (22) dokazano za svaki slučaj. Iz (21) i (22) izlazi

$$\Pi(b) = \frac{1}{2}\Pi(c-\beta) + \frac{1}{2}\Pi(c+\beta),$$
$$\Pi(\alpha) = \frac{1}{2}\Pi(c-\beta) - \frac{1}{2}\Pi(c+\beta). \qquad (23)$$



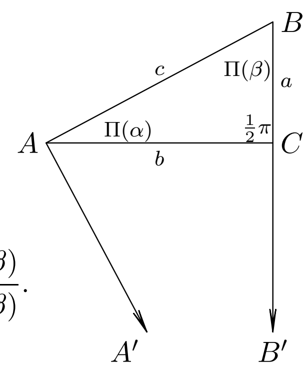
Slika 19.

Formula (18) daje

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\Pi(b)}{cos\Pi(\alpha)},$$

dakle je

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\left\{\frac{1}{2}\,\Pi(c-\beta) + \frac{1}{2}\,\Pi(c+\beta)\right\}}{\cos\left\{\frac{1}{2}\,\Pi(c-\beta) - \frac{1}{2}\,\Pi(c+\beta)\right\}};$$



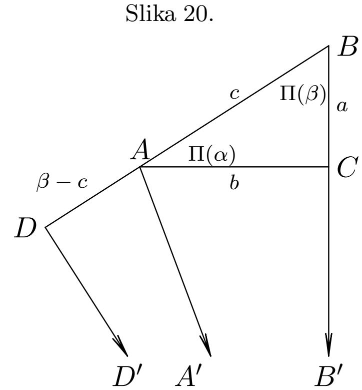
Slika 20.

ili

$$\frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{1}{2}\,\Pi(c)}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{1}{2}\,\Pi(c)} = \frac{1-\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\Pi(c-\beta)\cdot\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\Pi(c+\beta)}{1+\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\Pi(c-\beta)\cdot\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\Pi(c+\beta)}.$$

Uklonimo li nazivnike, izlazi

$$\mathrm{tg}^2\,\frac{1}{2}\Pi(c) = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\Pi(c+\beta). \quad (24)$$



Slika 21.

Ovdje β ne zavisi od c, jer kut $\Pi(\beta)$ možemo uzeti po volji u intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$; dakle se za β može uzeti svaki pozitivan broj od 0 do ∞. Uvrstimo stoga u (24) po redu $\beta = c,\ \ 2c,\ 3c,\ \ldots\ nc$.

Za $\beta = c$ izlazi

$$\mathrm{tg}^2\,\frac{1}{2}\Pi(c) = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\Pi(2c), \quad \text{jer je } \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\Pi(0) = 1.$$

Za $\beta = 2c$ izlazi

$$\mathrm{tg}^2\,\frac{1}{2}\Pi(c) = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\Pi(-c)\ \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\Pi(3c),$$

a kako je

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(-c) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Big(\pi - \Pi(c)\Big) = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(c),$$

bit će

$$\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}\Pi(c) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(3c),$$

i uopće

$$\operatorname{tg}^n\frac{1}{2}\Pi(c) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(nc) \tag{25}$$

za svaki pozitivni broj n. Nije teško izvesti, da ovo postoji i za negativno n ili razlomljeno. Ako jedinicu dužine odaberemo tako, da je

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(1) = e^{-1},$$

gdje je e baza prirodnih logaritama, onda će za svaku dužinu x biti

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x} \tag{26}$$

Ovo je tražena relacija među kutom peralelnosti i dužinom, koja mu odgovara. Iz nje razbiramo, da je

$$\Pi(x) = \frac{1}{2}\pi \quad \text{za } x = 0 \quad \text{i} \quad \Pi(x) = 0 \quad \text{za } x = \infty, \quad \Pi(x) = \pi \quad \text{za } x = -\infty,$$

kako smo i po definiciji pre uzimali.

Relacija (26) može se uzeti za osnovu geometrije Lobačevskoga.[26]

No mogli smo također postaviti $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(1) = e^{-1/R}$, pa bi bilo

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\Pi(x) = e^{-\frac{x}{R}}. \tag{27}$$

Na ovu ćemo se jednadžbu poslije povratiti. Sad ćemo samo dodati, da bi poradi ove relacije u svaku formulu geometrije Lobačevskoga ušla dužina R. No zaradi jednostavnosti uzimat ćemo sada $R = 1$.

i) *Uvođenje hiperbolnih funkcija.* Iz (26) izlazi

$$\sin\Pi(x) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\Pi(x)}{1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\,\Pi(x)} = \frac{2\,e^{-x}}{1+e^{-2x}} = \frac{2}{e^x+e^{-x}} = \frac{1}{\operatorname{ch} x},$$

$$\cos\Pi(x) = \operatorname{th} x, \quad \operatorname{tg}\Pi(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$$

[26] Engel, Zur nichteuklidischen Geometrie. Berichte d. k. sächs. Ges. d. Wissenschaften, L. 1898, 181–192 daje drukčije izvođenje.

Formule (19) i (20) mogu se sad tako transformirati, da mjesto cirkularnih funkcija kutova paralelnosti dođu hiperbolne funkcije dužina, koje odgovaraju onim kutovima. Na pr.

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \ \operatorname{ch} b, \quad \operatorname{th} b = \cos A \ \operatorname{th} c$$

$$\cos B = \operatorname{ch} b \ \sin A, \quad \operatorname{ch} c = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B \quad \text{itd.} \tag{27a}$$

Kod izračunavanja bolje se služiti ovakvim izrazima, u kojima dolaze hiperbolne funkcije, jer se one vladaju analogno kao i cirkularne. No zaradi geometrijskoga predočivanja bolje su one pređašnje. Svakako je velika prednost, što u svima jednadžbama možemo po volji imati ili same dužine ili same kutove.

k) *Nezavisnost sferne trigonometrije o postulatu paralelâ.* U članku e) vidjeli smo, da je ravnome trokutu

$$c, \quad a, \quad b, \quad \frac{1}{2}\pi, \quad \Pi(\alpha), \quad \Pi(\beta)$$

pridružen sferni trokut

$$\Pi(\alpha), \quad \Pi(\beta), \quad \Pi(c), \quad \frac{1}{2}\pi, \quad \frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha), \quad \Pi(b).$$

Ako mjesto ove oznake za dijelove sfernoga trokuta uzmemo

$$c, \quad a, \quad b, \quad \frac{1}{2}\pi, \quad A, \quad B$$

jednadžbe (16), (17), (18) daju

$$\begin{aligned} \cos a \ \sin B &= \cos A, \\ \sin c \ \sin B &= \sin b, \\ \cos B &= \sin A \ \cos b, \end{aligned}$$

a ovo su formule za sferni trokut, koje umijemo i drugim putem izvesti u običnoj geometriji. A budući da one jednako postoje u običnoj geometriji. A budući da one jednako postoje u običnoj geometriji kao i u geometriji Lobačevskoga, razbiramo, da su nezavisne o petom postulatu. One postoje apsolutno, kako kaže J. Bolayai.

Slutnja Lambertova, da bi hipoteza oštroga kuta mogla postojati na kugli imaginarnoga polumjera, obistinila se na izvjestan način. Ako u formulama

(27a), koje postoje za ravan trokut u ravnini Lobačevskoga, mjesto stranica a, b, c uvrstimo ia, ib, ic, a kutove ostavimo iste, preći će one u formule za sferni trokut. Taj je prijelaz očit, jer je

$$\operatorname{ch} ia = \cos a, \quad \operatorname{sh} ia = i \sin a, \quad \operatorname{th} ia = i \operatorname{tg} a.$$

No možemo i obrnuto na isti način od sferne trigonometrije prijeći na trigonometriju Lobačeskoga. Strane sfernoga trokuta treba samo uzeti imaginarne. Sferna trigonometrija u sebi je neprotivurječna, jer je možemo izvesti na osnovi geometrije Euklidove. A kako se *ravna trigonometrija Lobačevskoga* može izvesti iz obične sferne, bit će i ona *tako isto neprotivurječna*. A od formula trigonometrijskih mogli bismo obrnutim putem doći do geometrijskih pojmova kutova paralelnosti, graničnoga kruga i t. d.[27]

l) *Periferija kruga*. Neka je AB luk kruga, komu je središte u C, a polumjer mu je r. Tetiva $AB = s$ neka je stranica upisanoga pravilnoga n-terokuta. Centrični kut, koji joj ogovara, bit će $\frac{2\pi}{n}$. Spustimo li na AB okomicu iz središta, dobivamo pravokutni trokut, iz koga je po drugoj jednadžbi (19)

$$\operatorname{tg} \Pi(r) = \sin \frac{\pi}{n} \operatorname{tg} \Pi \left(\frac{s}{2} \right)$$

ili

$$\operatorname{sh} \frac{s}{2} = \sin \frac{\pi}{n} \operatorname{sh} r.$$

Ovo možemo preobraziti u

$$ns \frac{\operatorname{sh} \frac{s}{2}}{\frac{s}{2}} = 2\pi \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \operatorname{sh} r.$$

Pustimo li, da n raste, umanjivat će se s sve više. Granicu ns uzimamo za periferiju p kruga, pa tako izlazi

$$p = 2\pi \operatorname{sh} r = 2\pi \operatorname{ctg} r \tag{28}$$

Odavle se razbira, da omjer periferije prema radiju nije konstantan kao u običnoj geometriji, već promjenljiv.

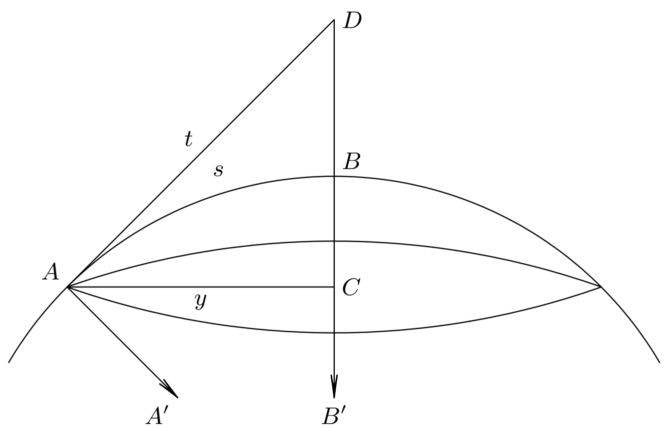
Centričnom kutu α pripada luk $\alpha \operatorname{sh} r$.

Spomenut ću još, da je u ovoj geometriji

površina kruga	$4\pi \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2}$
površina kugle	$4\pi \operatorname{sh}^2 r$
volumen kugle	$\frac{1}{2} \pi(e^{2r} - e^{-2r} - 4r)$.

[27] Vidi završetak „Načela geometrije” Lobačevskoga, zatim bilješku Vuka Bolayaija uz Appendix i Liebmanna, Nichteuklidische Geometrie, 134.

m) *Dužina luka i sektor graničnoga kruga.* Presijecimo graničnu kuglu ravninom, koja stoji okomito na jednu os kugle. Presjek je običan krug. Ovaj krug možemo uzeti najprije da se nalazi na graničnoj kugli i da mu je polumjer granični luk $AB = s$. Budući da na graničnoj kugli postoji Euklidova geometrija, imat ćemo za periferiju ovoga kruga $p = 2\pi s$.



Slika 22.

A sad ćemo uzeti ovaj krug u ravnini. Polumjer mu je okomica $AC = y$ spuštena iz A na os BB'. Po (28) periferija je njegova $p = 2\pi\ \mathrm{sh}\, y$. Iz ova dva izraza za periferiju p izlazi za *dužinu graničnog luka*

$$s = \mathrm{sh}\, y = \mathrm{ctg}\, \Pi(y). \tag{29}$$

Periferija kruga, opisana na graničnoj kugli nad izvjesnim graničnim lukom kao premjerom, može se držati periferijom, običnoga kruga, kome je premjer tetiva onoga graničnoga luka.

Lobačevski daje još jedan izraz za luk graničnoga kruga s pomoću dužine tangente t na taj luk od dirališta A do presjeka njezina s osi BB'. Vidimo, da je kut

$$DAC = \frac{1}{2}\,\pi - A'AC = \frac{1}{2}\,\pi - \Pi(y).$$

U trokutu je ACD kut $D = \Pi(t)$, stoga je

$$\cos\Pi(y) = \sin\Pi(y)\ \cos\Pi(t);$$

pa tako možemo pisati

$$s = \cos\Pi(t). \tag{30}$$

Uzmimo sada luk $AB = s = 1$ graničnoga kruga i dvije osi AA' i BB'(sl. 11^{bis}). Položimo u udaljenosti $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = 1$ koaksijalne granične lukove. Znamo, da je

$$s_1 = e^{-1},\ s_2 = e^{-2}, \ldots\ s_{n-1} = e^{-(n-1)}.$$

Koji snošaj postoji među lukovima, taj postoji i među površinama $p,\ p_1, \ldots$ četverokuta $AA_1BB_1,\ A_1A_2B_1B_2 \ldots$, naime

$$p_1 = p\, e^{-1},\ p_2 = p\, e^{-2},\ \ldots\ p_{n-1} = p\, e^{-(n-1)}.$$

Suma je svih ovih površina

$$P = p\, \frac{1 - e^{-n}}{1 - e^{-1}}.$$

Za $n = \infty$ dobivamo

$$P = \frac{p}{1 - e^{-1}}, \tag{31}$$

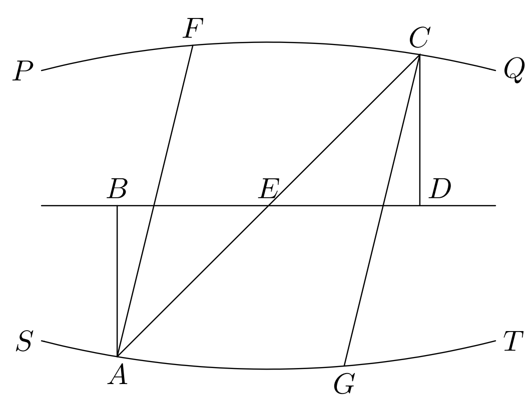
a to je *površina sektora graničnoga kruga* omeđena graničnim lukom AB i dvjema osima. Ovu ćemo površinu P uzeti kao jedinicu površine. Onda je

$$p = \left(1 - e^{-1}\right). \tag{32}$$

Za četverokut $ABA'B'$, kod koga je $AB = s$, $AA' = x$, izlazi

$$p\,(s, x) = s\,(1 - e^{-x}), \tag{33}$$

n) *Zbroj kutova u trokutu.* Neka su PQ i ST linije jednako udaljene od pravca MN. Konkavne strane ovih linija (ekvidistanta) okrenute su prema ovomu pravcu. Spustimo iz A i C okomice na pravac MN; one su među sobom jednake. A lako se može pokazati, da MN raspolavlja spojnicu tačaka A i C u E. To se razbira iz kongruencije pravokutnih trokuta ABE i CDE.



Slika 23.

Iz nje se još vidi, da su kutovi ECP i EAT jednaki. Ovo odgovara poučku o jednakosti izmjeničnih kutova kod paralelâ u Euklidovoj ravnini. Ako još na prvoj ekvidistanti uzmemo luk CF jednak luku AG na drugoj ekvidistanti, onda je trokut ACF kongruentan sa CAG. U ovim trokutovima dvije su strane segmenti pravaca, a treća je luk ekvidistante. Sad je kut

$$ACF = CAG, \quad GCQ = CGA,$$

i

$$ACF + ACG + GCQ = 2\pi,$$

pa će zbog toga biti također

$$CAG + ACG + CGA = 2\pi.$$

Ovo je pak zbroj kutova u trokutu ACG u kom su dvije strane pravci, a treća je ekvidistantna linija.[28] Povučemo li pravocrtnu tetivu AG, dobit ćemo trokut ACG, komu su sve stranice pravci. U tom su trokutu kutovi kod A i G manji nego li u pređašnjega trokuta sa mješovitim stranama. Zato je *zbroj kutova u pravocrtnom trokutu manji od dva prava*.

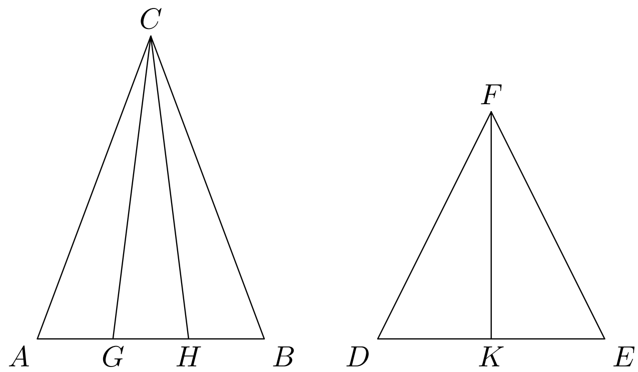
Lobačevski se u svojim istraživanjima ne služi ekvidistantnom linijom, dok Bolyai to izdašno čini. S njezinom pomoći dokazuje on dalje, da *jednaki trokuti, koji imadu jednu jednaku stranu, imadu isti zbroj kutova*, i zatijem da *jednaki trokuti imaju jednak zbroj kutova*. A onda ide da izvede:

o) *Snošaj među površinom trokuta i defektom*.[29] Razliku između 2π i zbroja kutova u trokutu zvat ćemo defektom. *Površine dvaju trokuta odnose se kao njihovi defekti*. Neka defekt iznosi u kod trokuta ABC, a v kod trokuta DEF. Onda je

$$\triangle ABC : \triangle DEF = u : v \tag{34}$$

[28] *J. Bolyai*, Appendix § 39. Dok nije bilo novoga izdanja, mogla se upotrebljavati *Frischaufova* obradba. Dodatka. Houëlov prevod ima odviše loše slike (izdanje od god. 1896.)

[29] *J. Bolyai*, Appendix § 42. Kad su površine trokuta nesumjerljive, treba potanjega istraživanja, no rezultat je isti.



Slika 24.

Uzmimo najprije da se površine ovih trokuta odnose kao brojevi $m(3)$ i $n(2)$. Razdijelimo prvi trokut pravcima, koji idu vrhom u m jednakih dijelova, a drugi u n. Dobiveni trokuti imadu po pretpostavci svi istu površinu p. Dakle je

$$\triangle ABC = mp, \quad \triangle DEF = np.$$

Neka je s zbroj kutova u trokutu u svakom onom malenom trokutu. Da svi ovi trokuti imadu isti zbroj kutova, razbroja se otuda, što oni svi imadu istu površinu, a sve dva i dva imadu po jednu zajedničku stranicu. U prvom se trokutu ABC zbroj kutova sastoji iz zbroja kutova u onim malenim trokutima, od koga još valja oduzeti zbroj kutova na osnovici kod G i H. Tako je

$$2\pi - u = ms - (m-1)\,2\pi$$

ili

$$u = m\,(2\pi - s),$$

a tako isto

$$v = n\,(2\pi - s).$$

Stoga je

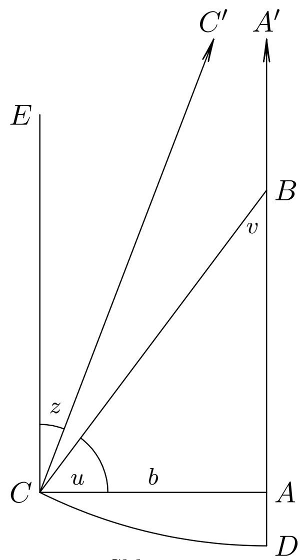
$$u : v = m : n, \tag{35}$$

a budući da i površine trokuta ABC i DEF stoje u omjeru $m : n$, uvjeravamo se namah o valjanosti poučka, koji je izražen formulom (34). Nju možemo također pisati u obliku

$$\frac{ABC}{u} = \frac{DEF}{v} = k \tag{36}$$

p) *Površina pruge među paralelama.* Uzmimo pravokutan trokut ABC, u kom su oštri kutovi u i v.Njegov je defekt $\frac{\pi}{2}$ $-u-v$, pa je stoga[30]

$$\frac{ABC}{\frac{1}{2}\,\pi - u - v} = k.$$



Slika 25.

Pustimo li stranicu AB, da raste beskrajno, kut v konvergirat će prema nuli, a u prema $\Pi(b)$. Trokut će prijeći u prugu ograničenu paralelama AA' i CC' pa okomicom CA. No ovu prugu možemo također držati trokutom, kome je jedan vrh u neizmjerenosti. Njegov je defekt $\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(b) = z$. I za ovaj će trokut biti

$$\frac{\mathrm{P}_{A'ACC'}}{\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(b)} = k. \tag{37}$$

Konstantu k odredit ćemo ovako. Položimo kroz C granični luk CD, kome su osi CC' i DA'. Površina je ovoga graničnog sektora omjerna s lukom $CD = s$. Uzmemo li za jedinicu površine vrijednost P danu jednadžbom (31), onda je mera graničnoga sektora $A'DCC'$ luk

$$s = \operatorname{ctg}\Pi(b) = \operatorname{tg} z.$$

Za omjer površine one pruge i ovoga sektora dobivamo

$$\frac{A'ACC'}{A'DCC'} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\operatorname{tg} z}{z}$$

Kad okomica AB pada, omjer ovih površina na lijevoj strani teži k jedinici, a tako isto i $\frac{\operatorname{tg} z}{z}$, pa zato mora biti $k = 1$. Tako iz (36) dobivamo, da je *površina pruge među paralelama*

$$A'ACC' = \frac{1}{2}\,\pi - \Pi(b). \tag{38}$$

r) *Površina trokuta.* Iz (36) izlazi za površinu trokuta ABC

$$\triangle = u$$

t. j.

$$\triangle = \pi - (A + B + C). \tag{39}$$

[30] *J. Bolyau*, Appendix § 43; Frischauf, elemente der absoluten Geometrie.

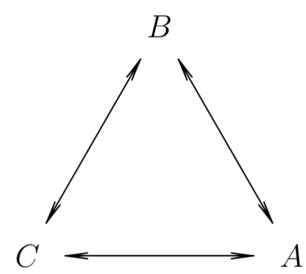
Što veći bude zbroj kutova to će manja biti površina. Najveća bi ona bila, kad bi svi kutovi bili jednaki nuli. Stranice su onda među sobom paralelne (sl. 26). Gornja je granica za površinu trokuta π. Pretpostavka, da površina trokuta može biti velika koliko hoćemo, ekvivalentna je s petim postulatom. Površina pravokutnog trokuta s kutovima $\Pi(\alpha)$ i $\Pi(\beta)$ iznosi

$$\triangle = \frac{1}{2}\,\pi - \Pi(\alpha) - \Pi(\beta). \tag{40}$$

Ovo ćemo sad izraziti u katetama. Jednadžbe (02), (03) i (3a) kazuju nam da se trokutu

$$a,\ b,\ c,\ \Pi(\alpha),\ \Pi(\beta),\ \frac{1}{2}\pi \tag{2}$$

mogu pridružiti trokuti



Slika 26.

$$a,\ D\left(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(\alpha)\right),\ \beta,\ \frac{1}{2}\pi{-}\Pi(b),\ \Pi(c),\ \frac{1}{2}\pi, \tag{3}$$

$$D\left(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(\beta)\right),\ b,\ \alpha,\ \Pi(c), \frac{1}{2}\,\pi - \Pi(a),\ \frac{1}{2}\,\pi. \tag{3a}$$

U (23) smo našli

$$2\,\Pi(b) = \Pi(c+\beta) + \Pi(c-\beta).$$

Ovo nam daje, kad pređemo na trokut (3),

$$\pi - 2\,\Pi(\alpha) = \Pi(\beta + c) + \Pi(\beta - c).$$

ili s pomoću definicije kuta paralelnosti za negativne dužine

$$2\,\Pi(\alpha) = \Pi(c-\beta) - \Pi(c+\beta).$$

Tako se isto može izvesti

$$2\,\Pi(\beta) = \Pi(c-\alpha) - \Pi(c+\alpha). \tag{41}$$

Kad i ovdje u (41) izvršimo prijelaz od (2) na (3), biva

$$2\,\Pi(c) = \Pi\left\{\beta - D\left(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(b)\right)\right\} - \Pi\left\{\beta + D\left(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(b)\right)\right\}. \tag{42}$$

Sličnim bismo putem našli i

$$2\,\Pi(c) = \Pi\left\{\alpha - D\left(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(a)\right)\right\} - \Pi\left\{\alpha + D\left(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(a)\right)\right\}. \tag{43}$$

Prijelazom od (2) na (3a) dobiva se iz (42)

$$2\Pi(\alpha) = \Pi\left\{D(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(a)) - D(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(b))\right\} - \Pi\left\{D(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(a)) + D(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(b))\right\},$$

dok prijelazom od (2) na (3) iz (43) izlazi

$$2\Pi(\beta) = \Pi\left\{D(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(b)) - D(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(a))\right\} - \Pi\left\{D(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(b)) + D(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(a))\right\}.$$

Zbrojivši posljednje dvije jednadžbe dobivamo

$$2\,\Pi(\alpha) + 2\,\Pi(\beta) = \pi - 2\,\Pi\left\{D\left(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(a)\right) + D\left(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(b)\right)\right\},$$

pa tako možemo pisati za površinu pravokutnoga trokuta (40)

$$\triangle = \Pi\left\{D\left(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(a)\right) + D\left(\frac{1}{2}\,\pi - \Pi(b)\right)\right\} \tag{44}$$

Po relaciji između dužine i kuta paralelnosti, koji joj odgovara, možemo pisati

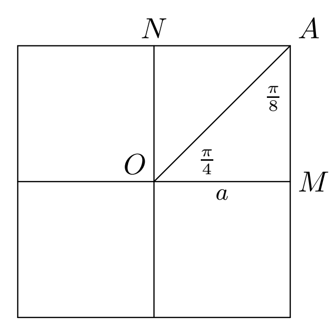
$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\triangle = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\,\pi - \Pi(a)\right)\,\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\,\pi - \frac{1}{2}\,\Pi(b)\right) \tag{45}$$

ili

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\triangle = \frac{e^a - 1}{e^a + 1}\cdot\frac{e^b - 1}{e^b + 1}. \tag{46}$$

s) *Pretvaranje maksimalnoga trokuta u kvadrat.* Četverokut možemo dijagonalom rastaviti u dva trokuta. Zato će površina četverokuta biti

$$\triangle = 2\,\pi - (A + B + C + D).$$



Slika 27.

Kod kvadrata su sve strane jednake, a i kutovi; samo oni ne mogu biti pravi. Površina je kvadrata

$$\triangle = 2\,\pi - 4A.$$

Ako ta površina ima biti jednaka površini maksimalnoga trokuta, mora kut kvadrata biti $A = \frac{1}{4}\,\pi$ (sl. 27.).

Pitanje je sad, kako ćemo konstruirati ovaj kvadrat? Pogledajmo pravokutni trokut OAM, koji je osmi dio ovog kvadrata.[31] Postavimo li $OM = a$, bit će

$$\operatorname{ch} a = \cos \frac{\pi}{8} : \sin \frac{\pi}{4},$$

ili

$$\operatorname{ch} a = \sin \frac{3\,\pi}{8} : \sin \frac{\pi}{4} \tag{47}$$

Konstruirajmo dva segmenta b' i c', koji pripadaju kutovima paralelnosti $\frac{3\,\pi}{8}$ i $\frac{\pi}{4}$. Ako je dakle

$$\Pi(b') = \frac{3\,\pi}{8},\ \Pi(c') = \frac{\pi}{4},$$

bit će,

$$\sin \frac{3\,\pi}{8} = \frac{1}{\operatorname{ch} b'},\ \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{ch} c'},$$

a kad se to uvrsti u (47), izlazi

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b' = \operatorname{ch} c'.$$

Dakle se a može odrediti kao kateta u pravokutnom trokutu, u kome je c' hipotenuza, a b' druga kateta. A kad se znade a, može se odmah konstruirati trokut OAM. Dodavši mu kongruentan trokut OAN dobijamo četverokut $OMAN$ sa tri prava kuta, dok četvrti iznosi $\frac{\pi}{4}$. Iz ovakva četiri četverokuta možemo napokon složiti kvadrat, kome je površina jednaka π t. j. površini maksimalnoga trokuta. Maksimalni se trokut može na posve analogan način pretvoriti u pravilni poligon. Samo broj strana poligona mora biti tolik, da poligon možemo u običnoj geometriji konstruirati.

Kod konstrukcije poligona u geometriji Lobačevskoga javlja se jedna osobitost.[32] Razdijelimo periferiju kruga u n jednakih dijelova i u djelištima povucimo tangente. U običnoj će se geometriji ove tangente vazda presijecati i sačinjavati poligon. No u geometriji Lobačevskoga samo onda, ako je polumjer kruga manji od dužine, koja odgovara kutu paralelnosti $\frac{\pi}{n}$. Kad je polumjer kruga jednak toj dužini, tangente su paralelne, a kad je veći, one divergiraju.

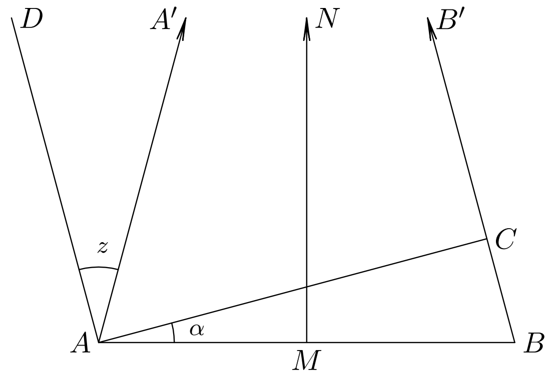
t) *Cirkulatura kvadrata.* Ovaj se kvadrat može pretvoriti u krug. Površina je kruga $p = 4\,\pi \operatorname{sh}^2 \frac{r}{2}$ ili

$$p = \frac{4\,\pi}{\operatorname{tg}^2 \Pi\left(\frac{r}{2}\right)}. \tag{48}$$

[31] Za ovaj članak i slijedeći isporedi *Bonola*, La geometria non euclidea, str. 98–103., i *Appendix* § 43.

[32] *Poincaré*, La science et l'hypothèse, 52.

Svakomu se krugu može pridružiti izvjestan kut, i to ovako. U sredini dužine $AB = r$ uzdignimo okomicu MN i tačkama A i B povucimo prema njoj paralelna AA' i BB'. Onda je kut



Slika 28.

$$A'AB = B'BA = \Pi\left(\frac{r}{2}\right).$$

Potegnimo još AC okomito na BB' i AD okomito na AC. Označimo li kutove $CAB = \alpha$, $A'AD = z$, onda je

$$z = \frac{\pi}{2} - \left(\Pi\left(\frac{r}{2}\right) - \alpha\right),$$

pa stoga

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg}\left(\Pi\left(\frac{r}{2}\right) - \alpha\right) = \frac{\operatorname{ctg}\Pi\left(\frac{r}{2}\right)\operatorname{ctg}\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\Pi\left(\frac{r}{2}\right)} \tag{49}$$

Iz ove ćemo relacije eliminirati α. U trokutu je ABC

$$\operatorname{ctg}\Pi\left(\frac{r}{2}\right)\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ch} r,$$

a kako je

$$\operatorname{ch} r = 2\ \operatorname{sh}^2\ \frac{r}{2} + 1 = 2\ \operatorname{ctg}^2\Pi\left(\frac{r}{2}\right) + 1,$$

izlazi

$$\operatorname{ctg}\Pi\left(\frac{r}{2}\right)\ \operatorname{ctg}\alpha = 2\ \operatorname{ctg}^2\Pi\left(\frac{r}{2}\right) + 1. \tag{50}$$

Ovo se može pisati

$$\operatorname{ctg}\Pi\left(\frac{r}{2}\right)\ \left(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\Pi\left(\frac{r}{2}\right)\right) = \operatorname{ctg}^2\Pi\left(\frac{r}{2}\right) + 1$$

ili

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\Pi\left(\frac{r}{2}\right) = \operatorname{tg}\Pi\left(\frac{r}{2}\right)\ \left(\operatorname{ctg}^2\Pi\left(\frac{r}{2}\right) + 1\right) \tag{51}$$

Gledajući (50) i (51) možemo (49) pisati

$$\operatorname{tg} z = \frac{2}{\operatorname{tg}\Pi\left(\frac{r}{2}\right)},$$

a površina kruga prelazi u

$$p = \pi \operatorname{tg}^2 z. \tag{52}$$

Kad je $z = \frac{\pi}{4}$ krug, ima istu površinu kao maksimalni trokut i onaj kvadrat, komu su svi kutovi $\frac{\pi}{4}$. Uzevši $z = \frac{\pi}{4}$ i obrnuvši konstrukciju naznačenu na slici 28. dobit ćemo polumjer ovog kruga. Kut $A'AC$ bit će također $\frac{\pi}{4}$, a dužina AC, koja mu odgovara, jednaka je jedinici dužine. Na AC treba u C potegnuti okomnicu BB'. Sad treba samo još na BB' odrediti tačku B tako, da bude kut $A'AB = B'BA$. Bolyai je u § 37. pokazao, kako se to izvodi. AB je traženi polumjer. Tačku B možemo odrediti i s pomoću raspolovnica kutova u trokutu.[32] Kao i u Euklidovoj ravnini, presijecaju se u jednoj tački. Ovo ostaje valjano i onda, kad jedan kut trokuta bude jednak nuli, kad su dakle dvije stranice paralelne, kao što su ovdje u trokutu $ACA'(B')$. Raspolovnice kutova $A'AC$ i $B'CA$ neka se presijecaju u tački P. Sastavimo onda A s drugom jednom tačkom E na BB' i raspolovimo kutove $A'AE$ i $B'EA$. Ako se ove raspolovnice sastaju u R, onda je PR tražena raspolovnica kuta kod A', koji je jednak nuli. Iz A potegnimo normalu AB na PR. Ona je jednaka polumjeru kruga.

u) *Kvadratura kruga.* Pišemo li u (52) $\operatorname{tg}^2 z = \frac{m}{n}$, površina je kruga

$$p = \frac{m}{n}\,\pi. \tag{53}$$

Ako je *n prost broj od oblika* $2^{2^v} + 1$, možemo krug *pretvoriti u kvadrat.* Kad je A kut kvadrata, površina je kvadrata $2\pi - 4A$. Može li ona biti jednaka površini kruga (53), mora da je

$$A = \frac{\pi}{2} - \frac{m}{4}\cdot\frac{\pi}{n} \tag{54}$$

Gauss je pokazao, kako se može odrediti kut $\frac{\pi}{n}$, ako je n prim-broj spomenutoga oblika. Uzmemo li, da je n ovakav, možemo dakle konstruirati kut A. A kad je taj kut određen, lako se može nacrtati kvadrat, koji mu

[32] Liebmann, Über die Begründung der hyperbollischen Geometrie. Math. Annalen, 59, 115.

pripada. Uzmemo li trokut OAM (poput onoga na sl. 27.), koji je osmina ovoga kvadrata, vidimo, da je sad

$$\measuredangle AOM = \frac{\pi}{4}, \quad \measuredangle OAM = \frac{\pi}{4} - \frac{m}{8} \cdot \frac{\pi}{n}, \quad \measuredangle OMA = \frac{\pi}{2},$$

a iz tri kuta može se konstruisati trokut.[34] Iz osam takvih trokuta sastoji se traženi kvadrat. No možemo i drukčije raditi.

Označimo li i ovdje $OM = a$, bit će

$$\operatorname{ch} a = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{m}{8} \cdot \frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m}{8} \cdot \frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}},$$

pa se sad može raditi dalje kao i sa formulom (47).

Na osnovi ovoga razmatranja zaključuje J. Bolayai, da je ili Euklidov XI. aksiom (5. postulat) istinit ili je moguća geometrijska kvadratura kruga. No koje je od toga dvoga istinito, o tom da se dosad nije moglo odlučiti. Na kraju svoje rasprave obećava J. Bolyai, da će u zgodnijoj prilici dokazati, da se uopće ne može odlučiti, koji geometrijski sistem u istinu postoji, Euklidov ili ovaj, što ga je on razvio. No to nije nikad izveo.

8. Apsolutna jedinica dužine. Od načina, kojima se mislilo da bi se dalo odlučiti o pravoj prirodi iskustvenoga prostora, ogledat ćemo samo onaj, gdje se u pomoć uzima godišnja paralaksa zvijezda.

Već je Lambert istaknuo, da bi najvažnija posljedica hipoteze oštroga kuta bila ta, da bismo imali apsolutnu jedinicu dužine. Ovo su poslije isticali Schweikart i Gauss za neeuklidsku hiperbolnu geometriju. U sve formule hiperbolne geometrije ulazi ova jedinica dužine. Najprije se javlja u formuli

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\Pi(x) = e^{-\frac{x}{R}}.$$

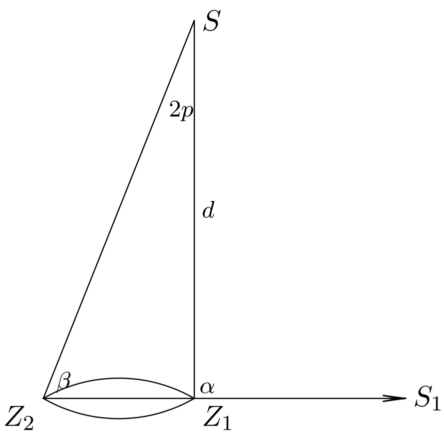
U teoriji možemo za R uzeti svaku vrijednost, pa imamo bezbroj geometrija iste vrste, koje se samo razlikuju jedinicom dužine. Gornja je granica te dužine $R = \infty$, a prethodna formula reducira se tada na $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\pi(x) = 1$, pa je tako za svako x kut paralelnosti $\pi(x) = 90^\circ$. A to je geometrija Euklidova. Donju granicu možemo odrediti s pomoću paralakse stajaćica.

Kad zemlja obilazi oko sunca, zraka Z_1S, koja spaja zemlju Z_1 sa zvijezdom S, izvodi dvostruki čun sa vrhom u S. Poradi toga se čini, da zvijezda S za godinu opiše na nebu malenu elipsu, kojoj je veća os paralelna sa ekliptikom. Kut p, pod kojim se s te zvijezde vidi polumjer staze zemaljske, zove se godišnja paralaksa zvijezde.

[34] Konstrukciju pravokutnog trokuta iz dva oštra kuta pokazao je *Simon* u Matematičkim analima 48, 706. Potanko razmatranjeo konstrukciji trokuta iz tri kuta izveo je *Liebmann* u spisima saskoga učenoga društva za god. 1901, 477–491.

Paralaksa određuje se na taj način, da se u izvjesno vrijeme sa zemlje mjeri kut među dvije zvijezde i onda opet iza pola godine.[35] Da bude sve najzgodnije, uzet ćemo, da se jedna zvijezda S_1 nalazi u produženju dijametra Z_2Z_1 zemaljske staze, a smjer druge zvijezde S da je normalan na nju u tački Z_1. Ako je kut $S_1Z_1S = \alpha$, $S_1Z_2S = \beta$, paralaksa je $p = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Označimo li dijametar zemaljske staze sa $2r$, a udaljenost zvijezde S od zemlje sa d, dobivamo iz trokuta SZ_2Z_1

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{th} d}{\operatorname{sh} 2\,r}.$$



Slika 29.

Uvedemo li ovdje $2p$ pišući $\beta = 90° - 2p$, pa istaknemo li i jedinicu R, kojom se mjere dužine d i $2r$, dobivamo

$$\operatorname{ctg} 2p = \frac{\operatorname{th} \frac{d}{R}}{\operatorname{sh} \frac{2r}{R}}$$

ili

$$\operatorname{cth} \frac{d}{R} = \frac{\operatorname{tg} 2p}{\operatorname{sh} \frac{2r}{R}}. \qquad (55)$$

Ovako je izražena udaljenost zvijezde S od zemlje uz pretpostavku, da u iskustvenom prostoru postoji geometrija Lobačevskoga. Paralaksa p vrlo je malen kut; samo kod nekih zvijezda mogao se izmjeriti. Zato u beskonačnom redu, kojim je određen $\operatorname{tg} 2p$, možemo zadržati samo prvi član $2p$, a sve drugo izostaviti. Tako ćemo isto i u redu za $\operatorname{sh}\frac{2r}{R}$ zadržati samo prvi član $\frac{2r}{R}$, jer se R mora pretpostavljati mnogo veći od r. Inače bi se odlučno očitovao neeuklidski karakter geometrije u našem prostoru. Poradi toga prelazi (55) u

$$\operatorname{cth} \frac{d}{R} = \frac{Rp}{r} \qquad (56)$$

Hiperbolni kotangens opada od ∞ do $+1$, kad mu argument raste od 0 do ∞. Poradi toga je za svaku realnu udaljenost $\operatorname{cth}\frac{d}{R} > 1$, dakle $Rp > r$. Kako je 1 najmanja vrijednost desne strane u (2), mora postojati neka najmanja vrijednost paralakse $p = \frac{r}{R}$. Tu bi paralaksu morale pokazivati i najudaljenije zvijezde. No sigurno je, da mnoge zvijezde nemaju paralaksu od $0 \cdot 05''$, pa stoga mora biti minimalna paralaksa manja od $0 \cdot 05''$. Otuda dobivamo kao

[35] *K. Schwarzschild*, Ueber das zullässige Krümmungsmaass des Raumes. Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 35. Jahrgang, str. 337–347. Leipzig 1900.

donju granicu za apsolutnu jedinicu dužine $R > \frac{r}{\operatorname{arc} 0 \cdot 05''}$. Luk od $0 \cdot 05''$ iznosi od prilike $\frac{24}{10^8}$, pa je tako $R > 4,000.000$ polumjera zemaljske staze. U okruglim brojevima možemo kazati, da je *apsolutna jedinica dužine u prostoru Lobačevskoga veća od šest stotina bilijuna kilometara.*

U povijesti ovoga pitanja može se lijepo motriti, kako se apsolutnoj jedinici dužine postepeno pripisivala sve veća vrijednost. Lambert još i ne sluti, kolika nbi ona u istinu mogla biti. Razbira se to iz onoga njegovog primjera o četverokutu sa tri prava kuta, u kome bi dvije stranice, koje oštromu kutu od 80° nasuprot stoje, mogle iznositi po jednu parisku stopu. Schweikart[36] misli, kad bismo za jedinicu dužine uzeli polumjer zemaljske kugle, da bi ta jedinica s obzirom na dužine, koje dolaze u svakidanjem životu, bila neizmjerno velika. Obazirući se Gauss na ove izvode Schweikartove ističe, da bi po astronomskom iskustvu apsolutna jedinica morala biti nerazmjerno veća od polumjera zemlje. Lobačevski[37] zna, da jedinica dužine u njegovoj teoriji mora biti veća od svih udaljenosti, koje nam dolaze pod mjeru, pače veća i od udaljenosti nebeskih tjelesa. On iz paralakse Siriusa nalazi, da bi premjer zemaljske staze bila manja od šest milijuntina te jedinice. Po tom bi jedinica bila veća od 170.000 premjera zemaljske staze.[38] A po Schwarzschildu treba uzeti onaj golemi broj od četiri milijuna tih premjera. Ako uzmemo, da u iskustvenom prostoru postoji geometrija Lobačevskoga, *apsolutna jedinica dužine mora biti bar osam milijuna puta veća, nego je udaljenost sunca od zemlje.* Sad ćemo razumjeti, što smo prije rekli, da su sve dužine, s kojima imamo posla, presićušne prema toj apsolutnoj jedinici, tako da ih možemo prema njoj držati neizmjerno malenima. U praksi bi se formule Lobačevskoga reducirale na Euklidove. Uzmimo jedan primjer. Među stranicama pravokutnog trokuta postoji u ravni Lobačevskoga relacija

$$\operatorname{ch} \frac{a}{R} = \operatorname{ch} \frac{b}{R} \operatorname{ch} \frac{c}{R}.$$

Ako hiperbolne kosinuse izrazimo beskonačnim redovima, izlazi

$$1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{R}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{R}\right)^4 + \cdots =$$

$$\left\{1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{b}{R}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{b}{R}\right)^4 + \cdots\right\}\left\{1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{c}{R}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{c}{R}\right)^4 + \cdots\right\}.$$

---

[36] *Gauss*, Werke, VIII, 180–182.

[37] *Engel - Lobatschefskij*, str. 22

[38] *Liebmann* na posljednjoj strani svoje Neeuklidske geometrije daje 140.000. Taj broj se dobiva, ako se za a uzme aritmetička sredina brojeva, koje navodi Lobačevski na 23. strani, dakle od prilike $a < 7 \cdot 10^{-6}$.

Kad izmnožimo na desnoj strani, pa cijelu jedanadžbu pomnožimo sa $2R^2$, moći ćemo izostaviti sve članove, kojima u nazivniku dolazi druga potencija od R i više potencije, pa će ostati

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Čim je veće R s obzirom na stranice trokuta, tim manju pogrješku počinjamo izostavljajući rečene članove. Tako se ona formula Lobačevskoga asimptotski približuje Pitagorinoj formuli. Sva je euklidska geometrija granični slučaj geometrije Lobačevskoga. Zato za geometriju Lobačevskoga nijesu sretni nazivi „neeuklidska" ili „antieuklidska", kako je predlagao Gauss. Bolje je bilo ime „pangeometrija", koje je upotrebio jednom Lobačevski. No danas ne pristaje više ni ono[39]

Kad bismo htjeli ovaj odnošaj između geometrije Euklidove i geometrije Lobačevskoga razjasniti kojom analogijom iz fizike, mogli bismo uputiti na mehaniku elektrona. Ona se reducira na zakone Newtonove mahanike, kad brzine uzmemo dosta malene, a inače pokazuje velikih razlika prema njoj, na pr. u njoj ne postoji zakon ustrajnosti, zakon reakcije, a i mase se mijenjaju s brzinom elektrona.

9. Interpretacija geometrije Lobačevskoga. Vratimo se za čas na onaj Lambertov četverokut $ABDG$ (sl. 6.) sa tri prava kuta i sa četvrtim oštrim, koji iznosi 80°. Kad su dani kutovi, stranice možemo izračunati. Iz trokuta ABG izlazi

$$\operatorname{ch}\frac{AB}{R} = \frac{\cos 40^\circ}{\sin 45^\circ}, \quad \operatorname{ch}\frac{BG}{R} = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 40^\circ}$$

Ako se zaustavimo kod prvih decimala, imat ćemo

$$AB = 0 \cdot 40\, R, \quad BG = 0 \cdot 44\, R$$

ili $AB >$ tri milijuna dvjesta tisuća,

$BG >$ tri milijuna trista tisuća udaljenosti zemlje od sunca. U ovom četverokutu razlikuje se zbroj kutova od četiri prava za 10°. Da je ta razlika veća, porasle bi i stranice. Što manji uzmemo kut kod G, to će veće biti stranice. Ako pak uzmemo stranice manje, onda raste kut kod G. I tako razbiramo, da se ovaj četverokut može predočiti samo u apsolutnoj veličini, a ne

[39] *Poincaré*, La science et l'hypothèse, str. 92–105., načelno je protiv ovakih pokušaja, kojima se misli da bi se dalo odlučiti među hipotezom Euklidovom i hipotezom Lobačevskoga. Obrazlaže to time, što se svi pokusi mogu ticati samo odnošajâ među tjelesima u prostoru, a nikako odnošajâ među različitim dijelovima samog prostora. Pitanje, koja je geometrija *istinita*, ne ima smisla; pitati se može samo, koja je *udobnija*.

može se predočiti manjim, sličnim četverokutom kao u geometriji Euklidovoj. U geometriji Lobačevskoga nema sličnosti likova. Kutovi u četverokutu mogu biti svi manji od pravoga kuta. Mogu biti maleni kako hoćemo, samo su tada stranice sve veće. Kutovi bi mogli biti i svi jednaki nuli; stranice su onda beskrajno velike. Svi likovi, što ih možemo nacrtati ili inače kako naznačiti, neizmjerno su maleni s obzirom na apsolutnu jedinicu dužine. Mogli bismo zato reći, da samo diferencijalnu geometriju Lobačevskoga možemo zorno predočivati; no ona ima karakter euklidski. Likove pak, koji ne iščezavaju, kad ih isporedimo s apsolutnom jedinicom, i na kojima se očituju osobitosti geometrijskoga sistema Lobačevskoga, ne možemo zorno predočivati, jer sve dužine na takvim likovima leže izvan dohvata našega iskustva. Tako su goleme! Diviti se stoga moramo još više, kako su Lobačevski i Bolyai, ne imajući zorne slike za svoja istraživanja, ipak umjeli izgraditi geometrijski sistem isto tako konsekventan i neprotivurječan kao i euklidski.

Poimanje geometrije Lobačevskoga znatno je olakšano, otkako je *Beltrami* pokazao, kako se analitički aparat te geometrije može primijeniti u teoriji površina konstantne negativne zakrivljenosti.[40]

Glavno pomagalo za izvođenje dokaza u elementarnoj geometriji sastoji se u tome, da se jednaki likovi mogu jedan na drugi položiti. No to se može izvoditi ne samo u ravnini i na kugli, već na svima površinama, na kojima mogu postojati jednaki likovi u različitim položajima. To su površine, koje u svakoj tački imadu isti umnožak dvaju glavnih polumjera zakrivljenosti. Inače se to veli, da one imadu konstantnu mjeru zakrivljenosti.

Kod tih površina možemo svaki dio – previnuvši ga – tačno priljubiti uza svaki drugi dio te površine. Ne čini ništa, što smo uzeti komad površine morali previnuti. Pri tom se nijesu izmijenili kutovi ni dužine linija.

Na takvim se površinama mogu likovi pomicati bez deformiranja, t. j. da se ne rastegnu niti raskinu.

Pravac je najbitniji element geometrije. Specifično je svojstvo pravca, da je posve određen svojim dvjema tačkama, tako da dva pravca ne mogu prolaziti dvjema tačkama, a da se ne podudare po cijeloj dužini. Na toj je osnovi postavljen ovaj postulat o pravcu. Neka su dane dvije ravnice i na

[0] *F. Enriques*, Problemi della scienza, 1906, str. 266–271., vidi u tome zabacivanju geometrijskoga realizma neopravdano obnavljanje nominalističke teze Kantove.

L. Nelson, Bemerkungen über Nicht-Euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewissheit; Abhandlungen der Fries'schen Schule, 1905, stoji sasvim na Kantovu stajalištu te drži, da mogućnost neeuklidske geometrije obara logični dogmatizam.

[40] *Beltrami*, Saggio di interpretzione della Geometria noneuclidea, Giornale di matematiche, VI, 1868. Ruski prijevod izašao je g. 1893. u Izvješćima kazanjskoga fiziko-matematičkoga društva. Pri ruci sam imao ovaj prijevod izrađujući ovaj prikaz Beltramijeve interpretacije.

svakoj od njih po jedan pravac. Položimo ove ravnice jednu na drugu. Ako se oni pravci podudare u dvije tačke, onda je to dovoljan uvjet, da se oni posve sliju.

Isto takav postulat možemo postaviti za geodetske linije na površinama konstantne zakrivljenosti. Na svakoj je površini uopće geodetska linija određena dvjema tačkama, no samo za geodetske linije na površinama postojane zakrivljenosti možemo izreći analogan stavak kao za ravnicu i za pravac. Neka su dane dvije površine postojane zakrivljenosti, koja je ista za obje površine. Na svakoj od njih neka je povučena po jedna geodetska linija. Položimo li ove površine jednu nadrugu tako, da geodetske linije imaju po dvije zajedničke tačke, onda će se te linije prekriti po cijeloj svojoj protezi.

Iz toga izlazi, da će planimetrijski poučci, koji se za ravne likove dokazuju s pomoću načela polaganja jednoga lika na drugi i s pomoću postulata o pravcu, vrijediti posve jednako za likove načinjene iz geodetskih linija na površinama postojane zakrivljenosti. Na tom se osnivaju mnoge analogije među geometrijom u ravnini i geometrijom na kugli. Pri tome pravcima u ravnini odgovaraju geodetske linije na kugli, t. j. njezini najveći krugovi. Ali kod kugle, koja je površina postojane pozitivne zakrivljenosti, može nastupiti izuzetak, da geodetska linija ne bude određena s dvije tačke. To je onda, kad su te dvije tačke krajevi jednoga dijametra. Poradi toga neki planimetrijski teoremi nemaju analogije na kugli, na pr. poučak, da se ne mogu presijecati dva pravca, koji su okomiti na nekom trećem.

Kod površina negativne postojane zakrivljenosti može se vazda, bez izuzetaka, dvjema realnim tačkama površine položiti samo jedna geodetska linija. To je pokazao Beltrami, preslikavajući u ravninu na izvjestan način površinu, kojoj je konstantna zakrivljenost jednaka $-\frac{1}{R^2}$. Kvadrat elemenata luka na takvoj površini, koju ćemo zvati pseudosfernom površinom, uzeo je on u obliku

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - v^2)\,du^2 + 2\,u\,v\,du\,dv + (a^2 - u^2)\,dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)^2}. \tag{57}$$

Koordinate, na osnovi kojih je izveden ovaj izraz, vrlo su podesne poradi toga, što svaka linearna jednadžbba među u i v predočuje geodetsku liniju i što se, obrnuto, svaka geodetska linija može predočiti linearnom jednadžbom. Specijalno su i koordinatne linije

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

geodetske krivulje. Ako je θ kut između dvije koordinatne linije u tački

$(u,\, v)$, imamo

$$\cos\theta = \frac{u\,v}{\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}}, \quad \sin\theta = \frac{a\sqrt{a^2-u^2-v^2}}{\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}}. \tag{58}$$

Odatle se dobije $\theta = \frac{\pi}{2}$ kako za $u = 0$ tako i za $v = 0$. Geodetske linije, koje sačinjavaju sistem $u = \text{const.}$, presijecaju ortogonalno geodetsku liniju $v = 0$ drugoga sistema i obrnuto sve geodetske linije sistema $v = \text{const.}$ presijecaju pod pravim kutom liniju $u = 0$ prvoga sistema. U tački $u = v = 0$ presijecaju se pod pravim kutom linije

$$u = 0, \quad v = 0,$$

koje ćemo uzeti kao osnovne linije. Svaka tačka površine određena je kao presjek dviju geodetskih linija, koje su tom tačkom ortogonalno povučene prema osnovnim linijama.

Iz druge jednadžbe u (58) razbira se, da u i v moraju ispunjavati uvjet

$$u^2 + v^2 \leqq a^2 \tag{59}$$

Svakom peru realnih vrijednosti u i v, koje ispunjavaju uvjet (59), odgovara jedna realna tačka površine i obrnuto. Uzmimo dio te površine ograničen koturom

$$u^2 + v^2 = a^2 \tag{60}$$

Da ovaj dio te površine preslikamo geodetski na ravninu, postavit ćemo

$$x = u, \quad y = v.$$

Tim će se on preslikati u krug, komu je središte u početku koordinatnoga sistema, a polumjer mu je a. Geodetskim linijama površine odgovaraju tetive ovoga kruga, jer linearnoj jednadžbi u u i v odgovara linearna jednadžba između x i y. Specijalno odgovaraju geodetskim koordinatnim linijama paralele s koordinatnim osama u ravnini. Lako se možemo uvjeriti, da je kontur predočen jednadžbom (60) geometrijsko mjesto beskonačno udaljenih tačaka površine. Nutarnjost kruga

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{61}$$

geodetska je dakle slika čitavoga realnoga dijela pseudosferne površine. To se razbira ovako. Geodetska linija, koja izlazi iz tačke $u = 0,\ v = 0$, može se predočiti jednadžbama

$$u = r\,\cos\mu, \quad v = r\,\sin\mu \tag{62}$$

U ravnini, na koju preslikavamo pseudosfernu površinu, r i μ polarne su koordinate tačke, koja odgovara tački (u, v). Kako je μ stalno duž spomenute geodetske linije, dobivamo iz (57) za dužinu njezina luka

$$ds = R\,\frac{a\,dr}{a^2 - r^2}$$

a otuda

$$s = \frac{R}{2}\,\log\frac{a+r}{a-r}$$

ili

$$s = \frac{R}{2}\,\log\frac{a+\sqrt{u^2+v^2}}{a-\sqrt{u^2+v^2}} \tag{63}$$

Korijen treba uzeti s pozitivnim znakom, ako hoćemo da dobijemo apsolutnu dužinu s. Ta je dužina jednaka nuli za $r = 0$; raste, kad raste r; postaje beskonačno velika za $r = a$, t. j. za vrijednosti od u i v, koje ispunjavaju uvjet (60), a imaginarna je za $r > a$. Po tome je jasno, da je periferija kruga (60) geometrijsko mjesto beskonačno udaljenih tačaka pseudosfere. Taj krug možemo držati geodetskim krugom sa središtem u tački $(u = v = 0)$ i s beskonačno velikim geodetskim polumjerom.

Otuda podjedno izlazi, da su geodetske linije pseudosfere predočene tetivama kruga (61). Produženja tetiva izvan kruga nemaju nikakva realna značenja. S druge strane dvije su realne tačke pseudosferne površine predočene dvjema tačkama u krugu. A kako te dvije tačke određuju vazda samo jednu tetivu, i dvije će tačke na pseudosfernoj površini određivati vazda jednu geodetsku liniju, kao što smo već spomenuli.

Uzmemo li u jednadžbama (62) r kao stalno, a μ kao promjenljivo, onda te jednadžbe predočuju geodetski krug sa središtem (0, 0). Za taj je krug

$$du = -\,r\,\sin\mu\,d\mu, \quad dv = r\,\cos\mu\,d\mu,$$

a kad se to uvrsti u (55), izlazi

$$\sigma = \frac{R\,r\,\mu}{\sqrt{a^2 - r^2}} \tag{64}$$

Ovo je dužina luka geodetskoga kruga. U ravnini je taj luk predočen lukom kruga, komu je radius r i cetrični kut μ. Budući da je za svako r dužina σ proporcionalna sa μ, razbiramo, da geodetske linije, koje prolaze tačkom $(u = v = 0)$, zatvoraju među sobom isti kut kao i polumjeri, koji im odgovaraju i koji prolaze tačkom $(x = y = 0)$. Neizmjerno maleni dio površine, koji okružuje tačku ($u = v = 0$), konformno je preslikan u ravninu. To ne vrijedi za okolinu nijedne druge tačke.

Izraz (64) možemo preobaziti uvršćujući u nj za r vrijednost, koja izlazi iz (63), naime

$$r = a \operatorname{th} \frac{s}{R} \quad \text{i} \quad \sqrt{a^2 - r^2} = \frac{a}{\operatorname{ch} \frac{s}{R}}.$$

Dobiva se

$$\sigma = \mu R \operatorname{sh} \frac{s}{R} \tag{65}$$

tako je opseg kruga geodetskoga, komu je polumjer s,

$$2\pi R \operatorname{sh} \frac{s}{R} \quad \text{ili} \quad \pi R \left(e^{\frac{s}{R}} - e^{-\frac{s}{R}}\right).$$

Potražit ćemo sada snošaj među kutom dviju geodetskih linija i kutom tetiva, koje im odgovaraju. Neka geodetske linije prolaze tačkom (u, v) na površini, i neka je (U, V) makar koja tačka na jednoj od tih geodetskih linija. Jednadžbe su njihove

$$V - v = m\,(U - u), \quad V - v = n\,(U - u). \tag{66}$$

Ako je α kut tih geodetskih linija, a α' kut tetiva, koje im odgovaraju, μ i ν pak kutovi tih tetiva s osju X, onda je

$$m = \operatorname{tg} \mu, \quad u = \operatorname{tg} \nu, \quad \alpha' = \nu - \mu$$

i

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \alpha' \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}}{a^2 \cos \alpha' - (v \cos \mu - u \sin \mu)(v \cos \nu - u \sin \nu)} \tag{67}$$

Nazivnik desne strane ostaje konačan zasvaku realnu tačku površine, stoga kut α može biti jednak nuli samo, kad se brojnik poništi, a to može biti jedino tada, kad je

$$\sqrt{a^2 - u^2 - v^2} = 0$$

Presjek dviju geodetskih linija pada tada u beskonačnost.

Po tom možemo formulirati ova pravila:

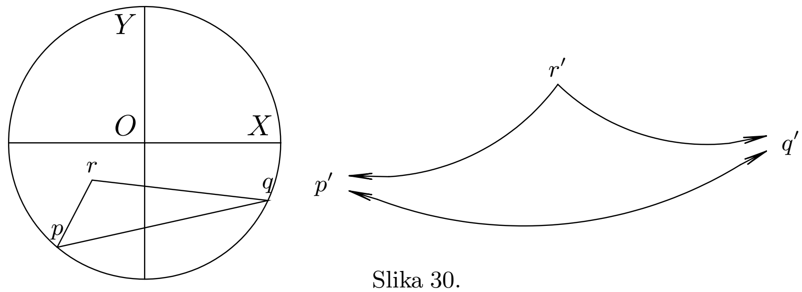
1. Dvjema tetivama, koje se presijecaju unutar kruga (61), odgovaraju dvije geodetske linije na pseudosfernoj površini, koje se u konačnosti presijecaju pod kutom između 0° i 180°.

2. Dvjema tetivama, koje se presijecaju na periferiji onoga kruga, odgovaraju dvije geodetske linije, koje se sastaju u beskonačnosti pod kutom jednakim nuli.

3. Dvjema tetivama, koje se presijecaju izvan onoga kruga ili su paralelne, odgovaraju dvije geodetske linije, koje nemaju nijedne zajedničke tačke.

Krug (61)

$$x^2 + y^2 = a^2$$



Slika 30.

predočen je na slici 30. Neka je $p\,q$ makar kakva tetiva toga kruga i r jedna tačka u krugu, koja ne leži na toj tetivi. Na pseudosferi odgovara tetivi $p\,q$ geodetska linija $p'q'$, provedena beskonačno udaljenim tačkama p' i q'. Tački r odgovara u konačnom dijelu površine tačka r, izvan one geodetske linije. Tom tačkom moguće je provesti bezbroj geodetskih linija, od kojih će neke zgađati geodetsku liniju $p'q'$, druge ne će. Prve su predočene pravcima, koji idu iz r k tačkama luka $p\,q$, a druge pravcima, koji idu od r do tačaka na luku $p\,y\,q$. Prijelaz od jedne kategorije na drugu čine dvije osobite geodetske linije, naime one, koje su predočene pravcima $r\,p$ i $r\,q$.

Budući da kutovi $r\,p\,q$ i $r\,q\,p$ imadu svoje vrhove na periferiji kruga (61), geodetski kutovi $r'p'q'$ i $r'q'p'$ jednaki su nuli po pravilu 2. Naprotiv će geodetske linije $r'p'$ i $r'q'$ po prvom pravilu u tački r, zatvorati kut različit od 0° i 180°, jer taki kut zatvoraju tetive $r\,p$ i $r\,q$.

Geodetske linije $r'p'$ i $r'q'$ reći ćemo da su paralelne s linijom $p'q'$, jer one čine prijelaz od linija, koje presijecaju $p'q'$, k linijama, koje je ne presijecaju. Sakupivši sve u jedno možemo kazati: Kroz svaku realnu tačku pseudosfere mogu se svagda provesti dvije realne geodetske linije, koje su paralelne s izvjesnom geodetskom linijom. Te paralele zatvoraju među sobom kut različit od 0° i 180°.

Ovaj se rezultat podudara s osnovnom predpostavkom neeuklidske geometrije Lobačevskoga i Bolyaija.

Zamijenimo li pojmove ravnine i pravaca s pojmovima površine i geodetske linije, nalazimo, da na površinama konstantne negativne zakrivljenosti postoje sve predpostavke Euklidove do petoga postulata. Da je taj postulat logična posljedica ostalih predpostavaka, morao bi on postojati i na pseudosfernim površinama. A budući da ne postoji, uviđamo, da taj postulat ne zavisi o ostalim prepisima Euklidovim, pa ga stoga nemoguće dokazati.

Budući da se geometrija na pseudosferi podudara s planimetrijom Lobačevskoga u svim osnovnim predpostavkama, podudarat će se one u svima njihovim daljim konsekvencijama. Beltrami to pokazuje najprije za kut paralelnosti dviju geodetskih linija i nalazi temeljnu relaciju među kutom paralelnosti i dužinom, koja mu pripada. Dalju potvrdu potpunoga podudaranja neeuklidske planimetrije i pseudosferne geometrije daje Beltrami izvodeći poučak o površini trokuta, koji čine tri geodetske linije na pseudosferi, i poučak o zbroju njegovih kutova. Zatim prelazi na proučavanje geodetskoga kruga, ekvidistantne linije i graničnoga kruga na pseudosferi. Potpuna suglasnost njegovih rezultata s poučcima Lobačevskoga i Bolyaia, koji im odgovaraju, potvrdila je identičnost neeuklidske geometrije s geometrijom geodetskih linija na pseudosfernim površinama.

Kao najjednostavniji oblik tih površina možemo uzeti pseudosferu t. j. rotačnu površinu, kojoj je meridijan krivulja jednako dugih tangenata (traktriks), a osa rotacije njezina asimptota. Slika 31. pseudosfere uzeta je iz Brillova kataloga.

Njezine se geodetske linije mogu preslikati u pozitivnu polovinu ravnine XY kao polukruzi, kojima se središta na osi X. Ovi polukruzi predočuju pravce u ravnini Lobačevskoga. Ovu veoma zgodnu interpretaciju geometrije Lobačevskoga uveo je Poincaré.[41] Preglednija je od Beltramijeve, a i konstrukcije se u njoj mogu vrlo lako izvoditi.

U enciklopediji elementarne geometrije[42] iznio je Wellstein lijepu elementarnu interpretaciju geometrije Lobačevskoga s pomoću hiperbolnoga sveska kugala.

Ima još i drugih načina, kako se s pomoću euklidske geometrije može realizirati ova geometrija.[43] Sve ove interpretacije ne samo olakšavaju proučavanje neeuklidske geometrije, već su one *očit dokaz za neprotivurječnost geometrijskoga sistema Lobačevskoga i Bolyaija*. Razne ove interpretacije određuju jednoznačnu i recipročnu korespodenciju među elementima geometrije Lobačevskoga i izvjesnim elementima euklidske geometrije. Kad bi se ikad u geometriji Lobačevskoga došlo do logičkoga protivurječja, trebali bismo te oprečne poučke na koji god od spomenutih načina euklidskih interpretirati,

[41] Isporedi moje *Primjedbe o jednoj interpretaciji geometrije Lobačevskoga*, Rad 154.

[42] *Weber-Wellstein*, Encyklopädie der elementaren Mathematik, II, 52. i dalje.

[43] Osobito je važna interpretacija *Kleinova* izvedena na osnovi *Cayleyeva* projektivnoga mjerenja u Matematičkim analima IV. i VI., pa u njegovim litografiranim predavanjima o neeuklidskoj geometriji, koja su izašla kod Teubnera.

pa bismo dobili protivurječne stavke u euklidskoj geometriji. No euklidska je geometrija neprotivurječan sistem. Predpostavke, na kojima je sagrađena euklidska geometrija, nijesu među sobom u opreci, t. j. konačnim brojem logičnih zaključaka nije moguće iz njih izvesti nijednu činjenicu, koja bi se protivila kojemu od postavljenih aksioma. To znamo posve pouzdano. A kad to tvrdimo, ne oslanjamo se naono nejasno pouzdanje, što ga u euklidski sistem ima svako, ko se s njim upozna, već to možemo i posve sigurno utvrditi. Može se naime učiniti, da aksiomama geometrije odgovaraju analogne relacije među elementima skupa realnih brojeva. Na toj se korespondeciji na pr. osniva analitična geometrija. Kad bi se iz aksioma, koji postoje u Euklidovoj geometriji, moglo logičnim zaključcima doći do kakva protivurječja, očitovalo bi se ono i u skupu realnih brojeva. Protivurječje u geometriji euklidskoj dovelo bi na taj način do proeivurječja u čistoj aritmetici.[44] A tu ga ne može biti.

Sad nam je jasno, da su se Saccheri i Lambert uzalud trudili tražeći protivurječje kod hipoteze oštroga kuta. I sam Jovan Bolyai mnogo je sumnjao o logičnoj ispravnosti svoga sistema apsolutne geometrije,[45] dok se kod Lobačevskoga ne nalazi ni traga takim sumnjama.

No poradi toga, što se geometrija Lobačevskoga i Bolyaija može euklidski interpretirati, proglašivali su neki neeuklidsku geometriju samo dijelom euklidske geometrije. Ali s istim bi se pravom mogla euklidska geometrija mogla držati dijelom geometrije Lobačevskoga, jer na graničnoj kugli Lobačevskoga (na plohi F Bolyaija) postoji euklidska planimetrija. Tri granična kruga sačinjavaju trokut, komu kutovi iznose 180° i t. d. Dapače se još potpunije dade euklidska geometrija intrepretirati na graničnoj kugli, nego što se

[44] *Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, str. 18, drugi problem u njegovom pariskom predavanju i predavanje na kongresu u Heidelbregu o osnovama logike i aritmetike.

[45] Jednom je i mislio, daje našao protivurječnost u njoj. Uzeo je pet tačaka u prostoru, tako da četiri nikad ne leže u jednoj ravnini, pa ih je sastavio pravcima. Neke česti dobivenoga lika mogu se izraziti na dva ili više načina. I sada se on pita, hoće li uvijek dobiti istu vrijednost, ako upotrijebi apsolutnu trigonometriju kod izračunavanja. Učinilo mu se, da u jednom slučaju nije dobio indetičan rezultat, i to ga je zavelo na zaključak, da je kriv sistem S t. j. da njegova apsolutna geometrija vodi do apsurda. Bio je i počeo pisati „Beweis des bis nun auf Erde immer noch zweifelhaft gewesenen, weltberühmten und, als der gesammten Raum- und Bewegungslehre zum Grunde dienend, auch in der That allerhöchstwiehtigsten 11. Euklid'schen Axioms". To je bilo oko god. 1856. No poslije je vidio, da je ono bila računska pogrješka, pa da u sistemu od pet tačaka vlada potpuna konsekvencija. Sistem od šest tačaka tako je kompliciran, da bi i najvještiji računar morao klonuti.

Isporedi Stäckelovu raspravu u Math. und naturw. Berichte aus Ungarn, XVIII, 1903, str. 280. Posljednji referat Stäckelov o Bolyaiju izašao je u XIX. Knjizi navedene zbirke pod natpisom „Johann Bolyai's Raumlehre".

neeuklidska geometrija može interpretirati na pseudosfernim površinama, jer ovdje smetaju singularne njihove linije. Hilbert je dokazao, da se i ne može cijela ravnina Lobačevskoga na Beltramijev način interpretirati na površinama konstantne negativne zakrivljenosti, jer ne postoji nijedna takva analitična površina, koja bi posvuda bila regularna i bez singulariteta.[46]

Onako se dakle ne smije zaključivati. Osim euklidskim interpretacijama neeuklidske geometrije čini se u geometriji ono isto, što se u fizici vrlo često radi, kad se izvjesna teorija prenosi iz jednoga područja u drugo. Za električne pojave postavljaju se na pr. mehanički modeli, hidrodinamičke analogije i t. d., pa zato ipak niko ne će reći, da su električni pojavi indetični s ovim mehaničkim slikama. Kod ovih slika ne preslikavaju se sami objekti istraživanja, nego samo relacije, koje među njima postoje.

Sugestivna snaga analogije očituje se neprestance u naučnim istraživanjima, pa se stoga ne ćemo iznenaditi, što su i *ove interpretacije neeuklidske geometrije učinile dobrih isluga u različitim područjima matematike*. Navest ću samo neke primjere, iz kojih će se razabrati, ako ništa drugo, a ono bar heuristička vtijednost neeuklidske geometrije.

Već je *Lobačevski* primijenio svoju geometriju kod izračunavanja nekih određenih integrala. Zadani diferencijal uzima on kao element dužine, površine, obujma ili mase u prostoru, u kom postoji njegova geometrija. Ta ga interpretacija posve prirodno navodi na transformaciju promjenljivica, koja će ga dovesti do cilja. Dakako da se svi ti integrali mogu odrediti i bez pomoći neeuklidske geometrije, ali ona razjašnjuje put, kojim valja ići.

Poincaré u teoriji Fuchsovih grupa primjenjuje geometriju Lobačevskoga i kaže, da mu je ona učinila velikih usluga kod njegovih istaživanja. No u izlaganju svojih rezultata ipak se njom nesluži, jer se boji, da ne bude nesporazumka. (Acta math., I, 8).

Kad *Klein* u geometrijskom obliku razvija teoriju binarnih kvadratnih forama, služi se istim pomagalom (Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie). U velikom djelu Kleinovu o automorfnim funkcijama, što ga određuje Fricke, uvodni odsječak radi o raznim vrstama projektivnoga mjerenja u ravnini, a to je samo jedan način interpretiranja geometrije Lobačevskoga i geometrije Ricmanove. Ovdje mu neeuklidska geometrija daje osobitu konkuretnu geometrijsku metodu, koja je od velike koristi za mnoga pitanja u teoriji grupa.

Prirodnu primjenu nalazi neeuklidska geometrija i u teoriji analitičkih funkcija sa dvije kompleksne promjenljive veličine (*Study*, Jahresbericht, XV, 477).

O primjenama ove geometrije u teoriji funkcija kompleksne promjenjivice

[46] *Hilbert*, Grundlagen str. 162. i dalje.

raspravlja i *Schlesinger* u spomenutom spisu (Ioannis Bolyai im memoriam).

No najkarakterističnije je, da imade slučajeva, gdje se zaradi dubljega shvaćanja razmjerno elementarnih pitanja euklidske geometrije ne može proći bez neeuklidske geometrije.

Da je to tako, potvrđuje nam jedan primjer Studyjev iz kinematike. Rezultanta dviju sila, koje djeluju na istu tačku, određuje se s pomoću paralelograma sila. No Study je našao još dvije konstrukcije, koje su od paralelograma posve različite, a rješavaju istu ovu zadaću.jedna je od njih tako zvani trapez klinova, a druga je trapez i tetraedar quirla. Te su konstrukcije poslužile Studyju kao polazna tačka za mnoga kinematička razmatranja, koja je iznio u svojoj „Geometrie der Dynamen". A te je konstrukcije on našao indirektnim putem, naime preko neeuklidske geometrije. Za spomenutu svoju knjigu veli dapače Study, da joj je mogao dati natpis „Primjene neeuklidske geometrije", kad to ne bi zavelo na krivo mišljenje o množini predznanja, koje se traži od čitatelja.

Još je Study uputio na tijesnu svezu između neeuklidske geometrije i geometrije pravca, pa se čini, da to područje obećava obilnih rezultata.

10. Utjecaj neeuklidske geometrije ne shvaćanje osnova geometrije. Govoriti o osnovama geometrije znači gotovo zaputiti u labirint veoma zanimljivih, no ujedno veoma teških problema, tim težih, što zasijecaju u granična područja pet–šest raznih nauka.[47] Opseg je tih pitanja prevelik, i nazori su o njima odveć raznoliki, da bih mogao o njima potanje izvijestiti. No sasvim ih mimoići ne mogu, jer je neeuklidska geometrija mnogo doprinijela ispravnijemu shvaćanju geometrijskih pojmova i aksioma.

Pitanje o prirodi i izvoru osnovnih geometrijskih pojmova i načela vodi odmah do prijepornoga pitanja, ima li ljudski duh urođenih ideja i principa ili ih nema, pa onda do pitanja, kako odgovaraju naše predodžbe zbilji? Kant je stekao veliku zaslugu po strože formuliranje ovih pitanja. Njegovi su nazori o njima bili dugo vremena odlučni; zato ćemo se najprije njih dotaknuti.

Po Kantu prostor i vrijeme imadu za sve pojavno područje realnu vrijednost, ali s obzirom na bića sama o sebi jesu nešto nezbiljno, puko idealno; prostor i vrijeme nijesu ništa izvan našega duha, izvan pojava. Te dvije općenite pomisli nijesu apstrakcije razuma od pojedinih osjetnih opažaja, nijesu pojmovi, nego su u duhu već *prije* osjećanja, duhu urođeni, apriorni *oblici zora*, i to potrebni oblici zora; jer naš duh može pomišljti, da u pros-

[47] *B. Erdmann*, Die Axiome der Geometrie, 1877.
A. Gerstel, Über die Axiome der Geometrie. Wissenschaftliche Beilage zum sechzehnten Jahresbericht der philosophischen Gesellschaftn an der Universität Wien. Leipzig 1903.
A. Hausdorf, Das Raumproblrm. Ostwald, Annalen III. 1904.

toru i vremenu nema nikakovih stvari, ali ne može ne pomišljati prostor i vrijeme; *tih* pomisli ne može se otrasti.[48]

A na tome, što je prostor apriorni, potrebni oblik zora, osniva se po Kantu apodiktična sigurnost svih osnovnih načela geometrije, kao i to, da ta načela možemo a priori postavljati.[49] Jer da je pomisao prostora empirički pojam, apstrahiran od osjetnih opažaja, geometrijskih aksioma, budući samo zaglavci indukcija, imali bi jedino relativnu vrijednost. Onda na p.r., veli Kant, ne bi bilo logički nužno, da se između dvije tačke može povući samo jedan pravac, ali nas iskustvo uči da jest tako. O broju dimensija prostoramoglo bi se samo to reći, da dosada nije nađen nijedan prostor, koji bi imao više od tri dimenzije i t. d.

Geometrija je u XVII. i XVIII. vijeku bila nepridobitna tvrđava idealista u borbi protiv emprizma. Oni, koji su držali, da ljudskih duh ima urođenih ideja i principa, trebali su samo na geometriju pokazati. Geometrija je bila i Kantu glavno uporište, kad je gradio svoju teoriju apriorne spoznaje. Aksiomi su njeni i definicije po Kantu sintetični sudovi a priori.

Razvojem geometrije u XIX. vijeku ovaj se odnošaj sasvim izmjenio. Smjele konstrukcije raznih vrsta neeuklidskih geometrija, od kojih svaka u nečem drugom odstupa pd Eulkidova sistema, oborile su vjeru u apriornost i apodikličnu sigurnost osnovnih načela geometrije.[50] Da su ta načela logički nužna, samo bi jedna geometrija bila moguća. Što se prije držalo kao prijeka potreba nutarnjega zora, to se danas shvaća kao posljedak vrlo zamršenih

---

[48] *Fr. Marković*, Filosofijski rad R. J. Boškovića, str. 622. i 623. Rad 1887/8.

[49] U prvom izdanju Kritike čistoga uma. U drugom je izdanju ovo izostavljeno.

[50] *P. Milau*, beitrag zur Untersuchung des erkenntnisstheoretischen Wertes der verschiedene analytisch möglichen Raumformen, Archiv der Mathematik und Physik, 1905, sabirući na str. 354. rezultate svoga istraživanja, izriče svoje uvjerenje, da moderne teorije različitih prostornih oblika, koji su analitički mogući, nijesu potresle temelja Kantove nauke o prostoru.

Razloge za apriornost aksioma paralelâ izvodi on iz *principa apsolutne pravilnosti prostora* (Regelmässigkeitsprinzip), po kome smo sposobni prostorni naš zor raširiti beskonačno. Aksioma paralelâ uzima on u Legendreovu obliku: Ako se među kracima kuta uzme tačka P, onda se u euklidskoj geometriji može njom vazda povući pravac, koji siječe oba kraka toga kuta. U geometriji pak Lobačevskoga ima pravac, koji je paralelan s oba kraka kuta. Taj pravac dijeli tačke, koje leže između krakova kuta, u dvije kvalitativno različite grupe, a tim je povrijeđen princip pravilnosti prostora. Na jednoj strani ove paralele nalaze se tačke, kojima se može povući pravac tako, da siječe oba kraka, a na drugoj su strani one tačke, kojima se ne može položiti takav pravac. Budući da on ne može naći nikakova razloga, zašto bi se jedna tačka u kutu kvalitativno razlikovala od druge, zato otklanja hipotezu Lobačevskoga.

Ovdje ću samo primijetiti, da i u euklidskoj geometriji diskutirajući rješenje kakve konstruktivne zadaće dijelimo tačke ravnine ili prostora u područja, koja se kvalitativno razlikuju s obzirom na mogućnost rješenja. Zato prethodno umovanje nema dokazne snage.

procesa, a naročito uzgoja i navike.[51] kad se čovjek s nekim načelima upozna već kod prve obuke, te ih udilj uzima za osnovu svojim zaključcima, držat će ih napokon kao a priori istinite, kao logički nužne. No to je apriornost historička, a ne psihološka.

Gledajući, da se neki pojavi ponavljaju uvijek na isti način brzo smo skloni vjerovati, da se oni i ne mogu na drugi način događati. Činjenice čestoga iskustva lako uzimamo kao zbivanja logički nužna. Opažanja učinjena na malenom dijelu prostora prenosimo na svemir i t. d.

Koji osnovama geometrije pripisuju transcendentni izvor, držeći ih urođenim idejama duha, gledaju samo na gotov sistem geometrije, a ne pitaju, kako je došlo do njega, ni kako su se geometrijski pojmovi razvijali.

Zastalno je geometrija u početku imala značaj iskustvene nauke u užem smislu i služila je poglavito praktičnim svrhama, kako se vidi iz spomenika prastarih kultura. Iz imena se geometriji razbira, kako je nastala. Geometriju možemo postojano i s uspjehom primenjivati u prirodnim naukama i u praktičnom životu zato, što su geometrijski pojmovi u početku posve odgovarali empirijskim objektima.[52] Tačka je malena kuglica; pravac je napeto uže ili vrvca, štap, letva; ravnina je drvena daska ili ploča od kamena; krug je kolo, prsten, rub okrugloa suda i t. d. To je bila fizična geometrija,kako veli Helmholtz, ili prirodna, kako kaže Wellstein.[53]

Opažanja i mjerenja izvedena na ovakvim tvarnim elementima geometrije dala su najprvo znanje o svojstima njihovim. Dašto da je to bilo samo aproksimativno. Izrailjci su na pr. za broj π uzimali 3, kako se vidi iz knjige o carevima, I, 7, 23: „I sali more; *deset* lakata bješe mu od jednoga kraja do drugoga, okruglo unaokolo, ... a unaokolo mu bješe *trideset* lakata". Vrlo se često namjeravamo u povjesti matematike na istu rektifikaciju kruga po pravilu: što je u premjeru 1, to je u opsegu 3. To je pravilo rezultat mjerenja, koje i ne može drukčije biti nego netačno.

U ovoj se empirijskoj geometriji lako može doći do stavaka, koji odgovaraju aksiomama geometrije. Lijepo to razjašnjuju Helmholtz I Wellstein. Napet konac slika je pravac. Da dobijemo stabilniji model, možemo čvršću žicu tačno priljubiti uz napeti konac. Podupremo li tu žicu na dva mjesta, ostat će ona u miru. Viziramo li duž nje, stegnut će se pravac u jednu tačku, koja pokriva izvjesno mjesto na nekom daljem predmetu. Ostavimo li podupornje u miru, pa žicu po njima pomaknemo i opet viziramo, past će nam pogled opet na istu tačku onoga predmeta. Zato će nam se činiti, da je pravac

[51] *F. Klein*, Nicht-Euklidische Geometrie, I, 300.
[52] *M. Pasch*, Vorlesungen über neuere Gemetrie.
[53] *Helmholtz*, Vorträge und Reden, II, 395. *Wellstein*, Encyklopädie II, 22

ostao u miru. Tako razbiramo, da je pravac mehanički određen dvjema tačakama I da se segment pravca između tih dviju tačaka može produživati. Mnogo više opažanja možemo učiniti, kad prijeđemo na ravninu, kojoj je prototip površina mirne vode.

Nije moguće reproducirati onaj put, kojim se geometrijska spoznaja razvijala, ali nema sumnje, da je kod toga iskustvo, naime opažanje i mjerenje, odlučno utjecalo. No rezultati opažanja i mjerenja uopće vrijede samo u izvjesnim granicama tačnosti i uza specijalne uvjete, pod kojima se opažanje i mjerenje vrđi. Apstrahirajući iz ovakvih pojedinačnih opažanja aksiome, zajenjujemo netačne iskustvene rezultate sudovima, kojima pripisujemo apsolutnu preciznost i općenu valjanost. A time se dižemo nad iskustvo. *Idealizirajući dakle empirijska data stvaramo geometrijske pojmove i aksiome.*[54]

Vidjeli smo na pr., da je onaj materijalni pravac od žice zauzeo određeni položaj,kad smo mu poduprli dvije tačke, no ako podupornje metnemoveoma blizu jedan drugome, žica će se srušiti s njih. Tako je isto kod crtanja pravac određen dvjema tačkama, koje na papiru istaknemo. Ali ako su one veoma blizu, praktično je onda nemoguće s išto većom tačnosti povući pravac kroz njih. No u apstraktnoj geometriji ovakovih neprežilika ne ima, jer tu postavljamo kao aksiom, da je pravac određen dvjema tačkama, i to onda vrijedi bez izuzetaka, makar kakav položaj imale one dvije tačke.

Tako isto idealiziramo, kad definiramo osnovne geometrijske elemente. Pri tom radimo dosta samovlasno. A priori se na pr. ne može reći, koje ćemo svojstvo empirijskoga pravca držati za njabitnije, tako da ga moramo unijeti u definiciju idealnoga geometrijskoga pravca. Radimo tu od prilike onako, kao što radi fizičar, kad idealizirajući iskustvene činjenice uvodi materijalne tačke, idealne tekućine, apsolutno kruto tijelo i t. d.

Razumjet ćemo sada, zašto aksiome geometrije ne držimo ni apriornim sintetičnim sudovima, a ni jedino eksperimentalnim činjenicama, već *konvencionalnim odredbama.*[55] Postavljajući aksiome moramo se priljubljivati iskustvenim činjenicama s jedne strane, a s druge strane moramo paziti, *da aksioma bude što manje, no i da se ne izostavi koji, da su nezavisni između sebe i da se jedan drugome ne protive.* A ovo je posao težak. Redovno se

[54] *F. Klein*, Nicht-Euklidische Geometrie, I, 356.

L. Nelson, Bemerkunger über die Nicht-Euklidische Geometrie und den Ursprung der mathematischen Gewissheit, Abhandlungen der Fries'schen Schule I, 408, veli na to ovako. „Die in den Axiomen enthaltene Idealisierung der empirischen Daten wäre ohne die Voraussetzung der *reinen* Anschauung gar nicht möglich, weil uns ohne diese jeder Maszatab fehlen würde, der uns als „Ideal" der Präzision dienen könnte, und weil uns ebenso jedes Kriterium fehlen würde, das die „absolute Allgemeinheit" dieser Aussagen gewährleisten könnte".

[55] *H. Poincaré*, La science et l'hypothèse, 66.

primjenjuju razni aksiomi, koji nijesu izrijekom navedeni. I Euklid čini to. U zaključivanje na osnovi postavljenih aksioma nehotice ulaze i mnogi elementi intuicije. A to se ne smije dopustiti, jer su naše prostorne predodžbe nesavršene.

Neeuklidske geometrije imadu veliku vrijednost za dublje shvaćanje zadatka, što ga pojedini aksiomi vrše u sistemu euklidskom. Izgradnjom neprotivurječne geometrije Lobačevskoga i Bolyaija utvrđena je logična nezavisnost petoga postulata Euklidova o drugim aksiomima. Stoga se on i nije dao iz njih izvesti, nije se dao dokazati. Iz toga pak izlazi, da je taj postulat paralela u Euklidovu sistema zaista pravi aksiom. Euklid je imao pravo, što ga je postavio na početku svoga sistema. I ako danas hoćemo da razvijemo geometriju, koja će na najjednostavniji način poslužiti kod opisivanja realnih prostornih relacija, znademo posve jasno, zašto je nužno da uzmemo ovaj aksiom. Ali za razvijanje geometrije uopće nije potreban; može se zamijeniti drugim predpostavkama.

Na analogan se način pokušalo izolirati ostale aksiome eulkidske geometrije, utvrditi međusobnu njihovu nezavisnost, upoznati zadaću, koju oni imadu u sistemu i prema tome im odrediti pravo mjesto.

Tu se prije svega moraju postaviti aksiomi, koji su nužni, ali i dovoljni za izgradnju Euklidova sistema. Taj je posao izvršio *Hilbert*.[56] Kagan i Veronese radili su također mnogo o tome.[57]

Euklid počinje svoje Elemente definicijama tačke, linije, pravca, površine, ravnine i t. d. Dašto da su te definicije nedostatne. Hilbert ne radi tako, već u početku svoje knjige veli jednostavno:
„Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des *ersten* Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit A, B, $C\ldots$; die Dinge des *zweiten* Systems nennen wir *Gerade* und bezeichnen sie mit a, b, $c\ldots$; die Dinge des *dritten* Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen sie mit α, β, $\gamma\ldots$

Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „*liegen*", „*zwischen*", „*kongruent*", „*parallel*", „*stetig*"; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie*".

I sad dolazi dvadeset i jedan aksiom, kojima Hilbert opisuje spomenute relacije među ona tri sistema elemenata. Aksiome dijeli on u pet grupa. To

[56] *D. Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, 2. Aufl., 1903. Analizu njegovih radova iz područja geometrije učinio je *Poincaré*, Rapport sur les travaux de M. Hilbert, u Izvještajima kazanjskoga matematičkoga društva za god. 1904.

[57] *B. Каганъ*, Основания геометрии. 1905.

G. Veronese, Grundzüge der Geometrie. 1894.

su

I.	1–8.	*Aksiomi spajanja.*
II.	1–4.	*Aksiomi poređaja.*
III.	1–6.	*Aksiomi kongruencije.*
IV.		*Aksiom paralelâ.*
V.	1–2.	*Aksiomi neprekidnosti.*

Kako je Hilbert sasvim isključio intuiciju, razbira se iz navedenoga uvoda u njegove osnove geometrije, a još bolje će se to vidjeti iz nekih aksioma, na pr. iz trećega aksioma prve grupe: „*Na pravcu imadu vazda bar dvije tačke; u ravnini imadu vazda bar tri tačke, koje ne leže na jednom pravcu*". A intuicija nas direktno uči, da jednih i drugih tačaka imade bezbroj.

Šesti aksiom treće grupe glasi: „*Kad se dva trokuta podudaraju u dvije stranice i u kutu među njima, onda će i drugi kutovi, koji jedan drugomu odgovaraju, u ta dva trokuta biti među sobom jednaki*". A znamo, da su uvjeti ovoga aksioma jedan slučaj kongruencije trokutâ, koji se dokazuje polaganjem jednoga trokuta na drugi. No u logičnoj analizi osnovâ geometrije ne smijemo se služiti ovakim pomagalom. Zato moramo uzimazi kao aksiom jednakost onih drugih dvaju kutova, koji odgovaraju jedan drugome u onaka dva trokuta, da uzmognemo logičkim zaključivanjem, bez pomoći prenošenja i polaganja, dokazati, da će i treće stranice biti jednake.

Nekima se nije sviđalo djelo Hilbertovo, jer nijesu razabrali cilja, za kojim on ide. Ovakav bi postupak bio kod obuke posve neprirodan i promašio bi cilj. No ni Euklid nije pisao za početnike. Svojim načinom izlaganja htio je Euklid obraniti geometriju od prigovora sofista. A tako i danas sve dublje aritmetiziranje matematike i sve oštrije dotjerivanje aksiomatičke metode u geometriji imade da zadovolji razvijeniji smisao za strogost u matematičkim dokazima.[58] No kod istraživanja novih relacija imamo u netačnom prostornom zoru snažno pomagalo. Historija nas uči, da su netačni nazori bili više puta od velike koristi po razvoj matematike. Da su Newton i Leibniz znali, da je samo izuzetak, ako neprekidna funkcija ima derivaciju, teško bi bili dopžšli na deferencijalni račun. Lagrangevo pogrješno mišljenje o mogućnosti razvijanja funkcija u red Taylorov učinilo je golemu uslugu matematici.[59] Može se gotovo reći, da su u pravim stvaralačkim epohama približne i nepotpune

[58] *H. Poincaré*, L'intuition et la logique en mathématiques. To je prvi odsječak u djelu „La valeur de la science".

Klein se više puta svraća na to pitanje, na pr. u svojim predavanjima prigodom izložbe u Chicagu, u svojoj prepirci s Pringsheimom o aritmetiziranju, pa u litografiranim predavanjima o neeuklidskoj geometriji i o diferencijalnom i integralnom računu.

[59] *E. Picard*, Sur le développement dépuis un siècle de quelques théories fondamentales dans l'analyse mathématique. 1900., str. 4.

istine bile mnogo plodnije, negoli bi bile istine potpune i izrečene sa svim potrebnim ograničenjima. No iza toga se treba sabrati i logički obraditi dobivene rezultate. Tad je vrijeme za ovakva djela, kao što je Hilbertovo.

Postavivši aksiome i izvedavši iz njih posljedice, koje mu trebaju, Hilbert prelazi u drugom odsječku na *dokazivanje neprotivurječnosti i međusobne nazavisnosti aksioma*. Neprotivurječnost obične geometrije dokazuje svodeći geometriju na aritmetiku, kao što smo već prije spomenuli. Još ostaje, da se utvrdi nezavisnost aksioma treće, četvrte i pete grupe. Nezavisost aksioma paralelâ utvrđena je već izgradnjom neeuklidske geometrije. Nezavisnost aksioma kongruencije utvrđuje pokazujući, da se šesti aksiom treće grupe ili, što je isto, prvi poučak kongruencije trokuta, ne može logičkim zaključcima izvesti iz ostalih aksioma. Izvodeći taj dokaz ostavlja sve da je isto kao i u običnoj geometriji, samo prenošenje segmenata definira drukčije. Uzima naime, da dužina segmenta zavisi na drugi način o koordinatama krajnih tačaka nego u Cartesijevoj geometriji.

Nezavisnost aksioma neprekidnosti pokazuje izgrađijući *Nearhimedovu geometriju*, u kojo postoje svi aksiomi izuzevši prvi aksiom pete grupe, t. zv. Arhimedov aksiom, koji možemo ovako izreći: Ako po pravcu napredujemo jednako dugim koracima, iza konačna broja koraka možemo prijeći preko svake tačke u pravcu, koja leži u konačnosti.

Aksiomatičnoj metodi Hilbertovoj nije svrha, da iznalazi nove ili općenitije teoreme. Ona hoće samo da ispita položaj svakoga poučka u sistemu, da ispita njihovu svezu, tako da se sigurno može odrediti, koje su predpostavke nužne i dovoljne za utvrđenje svakoga poučka. Ovom metodom ispitao je Hilbert Desarguesov poučak o perspektivno položenim trokutima i Pascalov poučak u slučaju, kad se presjek čuna raspada na dva pravca. Tada je postavio *Nepascalovu geometriju*, koja je ujedno Nearhimedova. Ispitujući aksiomatički poučak o jednakosti kutova na osnovnici istokračnoga trokuta, došao je do *Nepitagorine geometrije*, u kojoj na pr. zbroj dviju stranica u trokutu ne mora biti veći od treće stranice. No Nearhimedova geometrija ostaje njegova najvažnija koncepcija.

Njegovim poticajem dao se *M. Dehn* na ispitivanje Legendreovih poučaka o zbroju kutova u trokutu, pa je kod te prilike postavio dvije nove geometrije *Nelegendrovu i semieuklidsku*. Na isti je način *G. Hamel* istražio stavak o pravcu kao najkraćoj spojnici dviju tačaka.[60] Čini se, da je ovo tek početak ove vrste istraživanja. K tomu još pridolazi sve više zahvaćanje metodâ teorije skupova u geometriju.

[60] To su njihove disertacije, a uz neke promjene štampane su također u 53. i 57. svesku Matematičkih anala.

Rekosmo, da kod postavljanja aksioma sudjeluje iskustvo, no geometrija se od drugih, recimo eksperimentalnih nauka razlikuje time, što se ona – kad su postavljeni aksiomi – pretvara odmah u čisto deduktivnu nauku. I ako joj osnove potječu iz iskustva, metoda je geometrije deduktivna. U tome će biti jedan razlog, što je mišljenje o apodiktičnoj sigurnosti geometrije tako učvršćeno i što se teško priviknuti na mišljenje, da je na pr. *Euklidov geometrijski sustav samo hipoteza*, i to onakva, kakvesu hipoteze u fizici ili u mehanici, i da bi se za opisivanje realnih prostornih relacija tako isto mogao uzeti sustav Lobačevskoga ili koji drugi.

Osobito sa strane filozofa bio je protiv takoga shvaćanja otpor vrlo žestok, a i sada još nije jenjao. „Sve neeuklidske geometrije rade o logičkim nemogućnostima" veli na pr. Laudahn u radnji „Ueber Inhalt und Gebiet der Geometrie".[61] No ima i nekih matematičara i fizičara, koji apsolutno odbijaju mogućnost svake druge geometrije do Euklidove. U većini je slučajeva tome kriva samo neupućenost.[62]

Tako na pr. veli *Stallo*,[63] da nas pristalice novoga geometrijskoga vjerovanja, koji drže, da su sve geometrijske istine empirijskog a izvora, ipak ubrzo vode u metageometrijski prostor, u kome mora klonuti misao, jer se činjenice svakidašnjega iskustva sasvim s vida puštaju.

A ovo nikako ne stoji. *Iskustvu, a pogotovo svakidašnjemu iskustvu ne protivi se hipoteza Lobačevskoga nimalo.* U teoretičkom pogledu razlikuje se vrlo bitno posljedice hipoteze Euklidove od hipoteze Lobačevskoga. Ali ne samo kod praktičnih operacija, već i kod svih naučnih istraživanja, koja leže u granicama našega iskustva, mogu se podjednako primjenjivati obje ove hipoteze. Rezultati izvedeni na osnovi jedne ili druge hipoteze slagat će se posve. A to stoga, što u formule Lobačevskoga ulazi apsolutna jedinica dužine, prema kojoj su sve dužine, s kojima se susrećemo u praksi, neizmjerno malene.

Dio prostora, u kome se podjednako mogu primijeniti ove dvije hipoteze,

[61] *Ostwald*, Annalen der Naturphilosophie, II, 145–200.

[62] *B. Erdmann*, Die Axiome der geometrie, analizira te prigovore, no glavna mu je svrha, da pokaže, kako noviji razvoj geometrije podupire empirijsku teoriju prostora.

L'enseignement mathématique bio je osobito s početka pun radova, kojima se pobija ili brani neeuklidska geometrija.

A budući da je štampano u Zagrebu, spomenut ću i djelce *M. Merchicha*, De veris integrae geometriae principiis contra geometras Euclideos simul et Noneuclideos. 1903.

[63] *Stallo*, Die Begriffe und Theorieen der modernen Physik, 1901., str. 221.

Što *Mach* u predgovoru njemačkomu izdanju Stallove knjige kaže, da se Stallovi naučni ciljevi podudaraju s njegovima, to se valjada odnosi samo na fiziku, jer u pitanju neeuklidske geometrije stoji Mach sasvim na stajalištu pangeometara, koje Stallo pobija. To se razbira iz njegovih članaka u „*Erkenntnis und Irrtum*", koji o tome rade.

nije malen; on obuhvaća sav naš dosadanji iskustveni prostor. Ni kod udaljenosti, s kojima se radi u astronomiji, ne pokazuje se još nikakva razlika među ove dvije hipoteze. Kad bi iskustveni naš prostor bio prostor Lobačevskoga, onda na pr. kod gibanja planeta[64] ne bi postojao princip ploha, a i treći bismo Kepplerov zakon morali donekle modificirati; vrijeme revolucije morali bismo nešto povećati. No to bi odstupanje od trećega Kepplerova zakona, kako ga obično uzimamo, bilo tako neznatno, da se mjerenjem ne bi moglo konstatirati, i kad bi ga bilo. Uopće moramo priznati, da nema nijedne činjenice, koja bi nas silila, da odstupimo od sistema Euklidova, ali ćemo odmah dodati, da tako isto nema nijedne, koja bi se protivila geometriji Lobačevskoga.

Iznošeno je više načina, kojima se mislilo da bi se dalo odlučiti o pravoj prirodi iskustvenoga prostora, ali i oni su samo to pokazali, da se s iskustvenim prostorom mogu podjednako slagati obje ove hipoteze. Hipoteza je Lobačevskoga ne samo logički, već i empirički ravnopravna Euklidovoj. No Euklidova hipoteza, koja se u historijskom razvoju geometrije pojavila prva, ima u primjenama odlučnu prednost, jer je mnogo jednostavnija. Zadovoljava dakle zahtjev ekonomije mišljenja bolje nego li hipoteza Lobačevskoga. Zato ćemo se njom jedinom služiti u praktičnim primjenama geometrije. Ali principijelno njeno preimućstvo slomljeno je zauvijek.[65]

Inhaltsangabe

Das vorstehende Referat über die erste Periode in der Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie ist ein Vortrag, gehalten am 16. März 1907. in der feierlichen Jahressitzung der südslavischen Akademie der Wissenschaften und Künste.

Die ältesten direkten Beweisyersuche des Parallelensatzes werden nur flüchtig erwähnt. Etwas eingehender ist die apagogische Methode Saccheris und Lamberts dargelegt, insbesondere die Folgen der Hypothese des spitzen Winkels. Nachdem der Stand der Frage am Anfange des neunzehnten Jahrhunderts charakterisirt ist, kommt man zu J. Bolyai und N. I. Lobatschefskij. Der Lebensgang dieser beiden Begründer der nichteuklidischen Geometrie und die Entwicklung ihrer Ideen wird auf Grund der bezüglichen Arbeiten Engels und Stäckels dargestellt. Es folgt dann ein kurzer Abriss der nichteuklidischen Geometrie nebst der Beltramischen Interpretation. Auch die

[64] *H. Liebmann*, Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum. Berichte der k. Sächs. Ges., 1902.

[65] *J. Wellstein*, Encyklopädie, II, 143.

Untersuchungen über das zulässige Krümmungsmass des Raumes werden besprochen und zuletzt der Einfluss der nichteuklidischen Geometrie auf die Auffassung der Grundlagen der Geometrie geschildert.

Електронски облик (формати .dvi, .ps, .pdf) књиге „*Први оснивачи нееуклидске геометрије*" настала је као семинарски рад (предмет „Методика наставе математике 2") Стојковић Татјане, Симовић Љиљане, Буквић Душице, Аксентијевић Наташе и Штулић Николе на Математичком факултету у Београду.

При изради коришћени бесплатни програми LaTeX (MiKTeX 2.2.7) и WinGCLC 1.5

У Београду, априла 2006е